Алгебра - маг 3

Лекция 1

Ближайшие несколько лекций мы изучаем матрицы и линейные операторы. Однако при вычислениях часто будут использоваться системы линейных уравнений, поэтому я хочу сказать несколько слов о решении систем.

„Менее элементарные" преобразования.

В методе Гаусса мы упрощаем систему, используя очень ограниченный запас элементарных преобразований. Хочется использовать более сложные преобразования, иметь больше свободы. Например, пусть есть система

$$(*)\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & +2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{9\mathrm{I}-3\mathrm{II} \\ 5\mathrm{I}-2\mathrm{II} \\ 2\mathrm{I}+\mathrm{II} \\ 7\mathrm{I}+4\mathrm{II}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow (*')\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Можем ли мы сделать такое преобразование?

$$(*)\quad AX = B \quad\rightsquigarrow\quad A'X = B' \qquad (*')$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad (UA)X \qquad U(B)$$

Пусть $U = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$:

Тогда наше преобразование есть не что иное как умножение слева на U. Заметим, что $\det U = -1$, то есть U - обратима! Значит системы $(*)$ и $(*')$ эквивалентны.

1 = 2

Упр: Можно умножать слева на обратимую матрицу U. Получим эквивалентную систему.

$$AX = B \qquad (UA)X = UB \qquad A' = UA, \quad B' = UB$$

Ясно что решение $(*)$, будет и решением $(*')$. Или

$$\{\text{реш. } (*)\} \subset \{\text{реш } (*')\}.$$

Но $(*)$ получается из $(*')$ умножением на U^{-1}.

Значит $\{\text{реш } (*)\} \supset \{\text{реш } (*')\}$, значит $\dots = \dots$

Собств. вектора и инвариантные подпространства

Мы уже определили собств. вектора, но я напомню.

Сначала: даны вект. пространство V и лин. оператор $h : V \to V$.

Опр: Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относит. h если $h(U) \subset U$. Или $\forall x \in U : h(x) \in U$.

Опр: Вектор $v \in V$ собственный, если подпространство

$k \cdot v = \langle v \rangle$ — 1. подпространство, натянутое на v

инвариантно : $\Updownarrow$ $v \neq 0$.

Это равносильно тому, что $h(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in k$.

Как искать собственные вектора и собств. значения?

$\boxed{1 = 3}$

Пусть есть базис $e_1, \ldots, e_n$ в V и дана матрица A оператора h в этом базисе. Вектор с координатами X собственный, если

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \quad \text{для некоторого } \lambda \in k.$$

Или $\quad A \cdot X - \lambda \cdot X = 0 \quad$, или $\quad (A - \lambda E) X = 0.$

Или система $n \times n$: $(A - \lambda E)X = 0$ имеет <u>ненулевое</u> решение!

Мы знаем: система $n \times n$ с правой частью 0 имеет ненулевое решение

$$\Updownarrow$$

столбцы матрицы коэфф линейно зависимы

$$\Updownarrow$$

определитель матрицы коэф. $= 0.!$

$$\exists X \neq 0 : (A - \lambda E)X = 0 \iff \underbrace{\det(A - \lambda E) = 0}_{\text{уравнение на } \lambda}.$$

<u>Пример:</u> $A = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -(\lambda+1) & 1 & 1 \\ 1 & -(\lambda+1) & 1 \\ 1 & 1 & -(\lambda+1) \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = -(\lambda+1)^3 + 2 + 3(\lambda+1)$: Сделаем замену переменной $z = (\lambda + 1)$

$-z^3 + 3z + 2 = 0$

$z_1 = -1$ очевидный корень

$$\begin{array}{l|l} -z^3 + 3z + 2 & z+1 \\ \cline{2-2} \underline{-z^3 - z^2} & -z^2 + z + 2 \\ \quad z^2 + 3z & \\ \quad \underline{z^2 + z} & \\ \qquad 2z + 2 & \end{array}$$

$z_2 = 2$

$z_3 = -1$

$\lambda_{1,2} = -2 \ ; \ \lambda_3 = 1$

Соответствующие собств вектора:

$\lambda = -2 \to z = -1 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $AX = 0 \Updownarrow$ сумма коорд $X = 0$

$$X = a\,[1, -1, 0]^T + b\,[0, 1, -1]^T$$

$\lambda = 1 \to$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad X = c \cdot [1, 1, 1]^T = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Можно заметить, что в этом случае V имеет базис из собств. векторов

$$e_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ e_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ e_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad и \quad A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Задача</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Какие λ? Какие соб. вектора? Есть ли базис из собств. векторов?

<u>Отв:</u> $\lambda = +2$, $\lambda = \pm 3$.

$$e_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ e_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ e_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$ базис из соб. вект

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Всегда ли существует базис из собственных векторов?

На самом деле: "довольно часто", но <u>не</u> всегда.

- есть примеры, когда не существует.
- "довольно часто" гораздо труднее объяснить. Мы к этому вернемся позднее.

Задача: Есть ли базис из собственных векторов у оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$?

Реш: Посмотрим, какие есть собств. вектора. Сначала — собственные значения.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(1+\lambda) + 4 = -3 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = +1$

и для нахождения соб. векторов решаем систему

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

— есть только "один собств. вектор" (с точностью до пропорциональности)

$\Rightarrow$ Базиса нет!

То есть — ни в каком базисе матрица не будет диаг.

Утв. матрица оператора диагональна $\Longleftrightarrow$ базис состоит из собств. векторов.

Док. По определению матр. оператора: диагональна $\Leftrightarrow$

$$h(e_i) = a_{ii} \cdot e_i + 0 \Leftrightarrow e_i \text{ — собств. вект., } a_{ii} \text{ — соб. знач.} \blacksquare$$

Вопрос: К какому "более простому" виду можно привести матрицу оператора, если не к диагональному?

— это мы будем ещё обсуждать.

<u>Опр:</u> Две матрицы A и B называются <u>подобными</u>, если $\exists C$, обратимая, для которой:

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

<u>Утв:</u> Матрицы оператора в разных базисах подобны.

A подобна диагональной матрице $\Leftrightarrow$ для оператора с матрицей A существует базис из собств. векторов.

<u>Док:</u> Есть базис, — находим C как матрицу перехода.

Есть C, — находим базис, используя столбцы C ∎

И про матрицу, и про оператор говорят в таком случае, что они <u>диагонализируемы</u>.

Мы доказали: матрица $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ не диагонализируема.

матрица $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ - диагонализируема.

<u>Характеристический многочлен.</u>

Многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называют характеристич. многочленом матрицы A или оператора h.

<u>Предл:</u> Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

Док. Пусть $A' = C^{-1} A C$

$$A' - \lambda E = C^{-1} A C - \lambda (C^{-1} C) =$$
$$= C^{-1} (A - \lambda E) C$$

$\Rightarrow \det(A' - \lambda E) = \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \det C = \det(A - \lambda E)$.

т.к. $\det C^{-1} \cdot \det C = \det(C \cdot C^{-1}) = 1$. ∎

Пусть $n = \dim V$, есть $h: V \to V$ и h имеет матрицу A в нек. базисе, $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - хар. многочлен h.

Теорема Если хар. многочлен $f(\lambda)$ имеет n различных корней в поле k, то h - диагонализируем.

Док. Главное доказать:

Предл: Собств. вектора $v_1, \dots, v_k$ с различными собств. значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - линейно независимы.

Тогда если есть n собств. значений, то есть система из n лин. независимых собств. векторов $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ она базис.

Предл. докажем индукцией по k.

$k = 1$ - ясно.

Пусть для меньше, чем k векторов уже доказано.

И предположим, что есть "зависимость"

(1) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k = 0$. Применим h:

(2) $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$. Умножим (1) на λ_k и вычтем из (2)

(3) $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_k + 0 = 0$ - зависимость для $v_1, \dots, v_{k-1}$.

$\Rightarrow$ для $i = 1, \dots, k-1$: $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$.

т.к. $\lambda_i \neq \lambda_k$, то $\alpha_i = 0$, тогда и $\alpha_k = 0$.

То есть (1) имеет обязательно тривиальные коэффициенты.

Это означает $v_1, \dots, v_k$ - лин. независимы! ■

<u>Препятствия</u> к диагонализируемости:

(1) $f(\lambda)$ имеет недостаточно корней (например делится на неприводимый многочлен степени > 1.)

(2) есть кратные корни (как было в нашем примере!)

Если $k = \mathbb{C}$ - комплексные числа, то (1) не встречается

<u>Теорема</u> (основная теор. алгебры в начале 19 века): <u>любой многочлен над $\mathbb{C}$ имеет корень</u>

Мы будем пользоваться этим фактом

<u>Док.</u> требует средств Анализа

<u>Сл.</u> Неприв. многочлены над $\mathbb{C}$ - только степени 1.

<u>Сл.</u> Неприв. многочлены над $\mathbb{R}$ - только ст 1 или ст 2.