Алгебра I курс, 2й модуль.

Листок 8

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ - диагональная матрица и a, b, c - различны. Найдите все матрицы коммутирующие с A.

2. Пусть A - матрица $n \times n$ (квадратная размера n). Покажите что существует многочлен $f(t)$ степени $\leq n^2$, для которого

$$f(A) = 0.$$

(Указание: матрицы $E, A, A^2, \dots$ должны стать линейно зав.)

3. Покажите, что для линейного оператора φ на V, $\dim V < \infty$, существует многочлен f, для которого $f(\varphi) = 0$.

4. Пусть линейный оператор $h : V \to V$ удовлетворяет уравнению $h^2 = \mathbb{1}$. Покажите, что h - отражение.

5. Пусть $\hat{p}, \hat{q}$ два однородных грассмановых многочлена степени m (от k переменных). Покажите, что

$$\hat{p} \cdot \hat{q} = (-1)^m \hat{q} \cdot \hat{p}.$$

Что будет если $\hat{p}, \hat{q}$ имеют степени m_1 и m_2?

6.** Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & b_1 & c_1 \\ -b & -b_1 & 0 & c_2 \\ -c & -c_1 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$ рассмотрим грассм многочлен

$$\hat{f}_A = a\,\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2 + b\,\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_3 + c\,\hat{x}_1 \wedge x_4 + b_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 + c_1 \hat{x}_2 \hat{x}_4 + c_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4.$$

и определим число p_A равенством

$$\hat{f}_A \cdot \hat{f}_A = 2 p_A \cdot \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4.$$ Докажите что $p_A^2 = \det A$.