

## Жорданова нормальная форма

**A18◊1.** Найдите жорданову форму матрицы:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

**A18◊2.** Решите уравнения

$$\text{а)} X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

**A18◊3.** Вычислите

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}^{64}.$$

**A18◊4.** Найдите жорданову форму следующих операторов:

- а)  $A : f(x, y) \mapsto f(x+1, y+1)$  в 9-мерном пространстве комплексных многочленов степени не выше 2 по  $x$  и  $y$ ; б)  $B = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$  в  $\frac{n(n+1)}{2}$ -мерном пространстве комплексных многочленов от  $x$  и  $y$  степени не выше  $n-1$ ; в)  $L_C(X) = CX$  в 4-мерном пространстве  $2 \times 2$ -матриц, где  $C$  — фиксированная  $2 \times 2$ -матрица известной жордановой формы.

**A18◊5.** Докажите, что всякая матрица сопряжена своей транспонированной.

**A18◊6.** Докажите, что  $n \times n$  матрица  $A$  нильпотентна тогда и только тогда, когда  $\text{tr } A = \text{tr } A^2 = \dots = \text{tr } A^n = 0$ .

**A18◊7.** Докажите, что максимальное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора  $A$  с собственным значением  $\lambda$  равно числу клеток с диагональным элементом  $\lambda$  в жордановой форме матрицы оператора  $A$ .

**A18◊8.** Докажите, что множество линейных операторов в  $n$ -мерном комплексном векторном пространстве, перестановочных с данным оператором  $A$ , является векторным пространством размерности не меньше  $n$ .

**A18◊9.** Докажите, что если линейный оператор  $B$  в комплексном векторном пространстве перестановочен с любым линейным оператором, перестановочным с оператором  $A$ , то  $B$  — многочлен от  $A$ .

**A18◊10.** Докажите, что если матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют соотношению  $AB - BA = B$ , то матрица  $B$  нильпотентна.