Проективная геометрия

A13◇1. Сколько имеется **а)** точек **б)** k-мерных проективных подпространств в n-мерном проективном пространстве над полем из q элементов.

A13◇2. Пусть $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n$ — непересекающиеся подпространства размерностей d_1 и d_2, таких что $d_1+d_2 = n-1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \setminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая $\ell \ni p$, пересекающая как L_1, так и L_2.

A13◇3. Покажите, что для любых двух наборов из $(n+2)$ различных точек на $\mathbb{P}_n$, таких что в каждом из наборов никакие $(n+1)$ точек на лежат в одной гиперплоскости, существует единственное линейное проективное преобразование, переводящее один набор точек в другой.

A13◇4. Допустим, что линейное проективное преобразование $\mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ не имеет неподвижных подпространств положительной размерности. Сколько неподвижные точек может быть у такого преобразования?

A13◇5. Для кривых в $\mathbb{RP}_2$, заданных в стандартной аффинной карте U_0 уравнениями:
а) $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$
напишите их глобальные однородные уравнения, а также локальные аффинные уравнения в двух других стандартных картах U_1 U_2, и нарисуйте все эти 12 аффинных кривых.

A13◇6. Покажите, что всякая неприводимая коника[1] на $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ допускает параметризацию вида $(t_0 : t_1) \mapsto \big(f_0(t_0,t_1) : f_1(t_0,t_1) : f_2(t_0,t_1)\big)$, где f_0, f_1, f_2 — взаимно простые однородные многочлены степени 2. Напишите такую параметризацию для коники $x^2 + y^2 = z^2$, а также 3 многочлена от (t_0, t_1), сюрьективно отображающие $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ на множество пифагоровых троек[2].

A13◇7. Сколько точек пересечения может быть у коники с произвольной кривой степени d, не имеющей с этой коникой общих компонент?

A13◇8. Вложим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ как действительную часть стандартной аффинной карты U_0. **а)** Найдите в $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ пересечение всех коник, видных в $\mathbb{R}^2$ как окружности.
б) Любая ли коника, проходящая через найденные выше точки и имеющая хотя бы 3 неколлинеарные точки в $\mathbb{R}^2$, будет видна в $\mathbb{R}^2$ как окружность?

A13◇9 (кривая Веронезе). Обозначим через U 2-мерное векторное пространство однородных линейных форм от переменных (t_0, t_1), а через S^dU — пространство однородных форм степени d от (t_0, t_1). Вложение $c_d : \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \xhookrightarrow{\psi \mapsto \psi^d} \mathbb{P}(S^dU) = \mathbb{P}_d$ называется *кривой Веронезе* (или *рациональной нормальной кривой*) степени d. Верно ли что:
- **а)** при $1 \leqslant m \leqslant d$ никакие $m+1$ точек на C_d не лежат в $(m-1)$-мерном подпространстве?
- **б)** всякая кривая $C \subset \mathbb{P}_2$, задаваемая в однородных координатах параметрическим уравнением $(t_0 : t_1) \mapsto \big(f_0(t_0,t_1) : f_1(t_0,t_1) : f_2(t_0,t_1)\big)$, где f_0, f_1, f_2 — взаимно простые однородные многочлены одинаковой степени d, является проекцией C_d?
- **в*)** любые $(n+3)$ точки в $\mathbb{P}_n$, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, переводятся на кривую Веронезе подходящим линейным преобразованием?
- **г*)** Задайте C_d явными квадратичными уравнениями (начните с $C_3 \subset \mathbb{P}_3$)

A13◇10. В условиях предыдущей задачи опишите проекцию[3] кубики Веронезе $C_3 \subset \mathbb{P}_3$:
- **а)** из точки t_0^3 на плоскость, натянутую на $3\,t_0^2t_1$, $3\,t_0t_1^2$, и t_1^3
- **б)** из точки $3\,t_0^2t_1$ на плоскость, натянутую на t_0^3, $3\,t_0t_1^2$, and t_1^3
- **в)** из точки $t_0^3 + t_1^3$ на плоскость, натянутую на t_0^3, $3\,t_0^2t_1$, and $3\,t_0t_1^2$

A13◇11*. Выведите из предыдущей задачи, что неособая (без самопересечений и заострений) кубическая кривая на $\mathbb{P}_2$ не допускает рациональной параметризации.

---

[1] *коникой* называется плоская проективная кривая, заданная однородным многочленом второй степени; *неприводимость*, по-определению, означает неприводимость этого многочлена

[2] т. е. троек целых чисел, являющихся длинами сторон прямоугольного треугольника

[3] т. е. выпишите явно параметрическое представление для проекции в подходящих координатах, затем найдите её однородное уравнение, а также аффинное уравнение в какой-нибудь карте; нарисуйте результат, выясните чему равна степень полученной кривой и имеет ли она самопересечения и/или острия