Разгонно-вспомоществовательные задачки про матрички

A$12\frac{2}{3}$◇1. Рассмотрим 4-мерное пространство $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ всех 2×2-матриц с базисом

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Свяжем с данной матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2 \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ три оператора на пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$:

$$\mathrm{Mat}_{2\times 2} \xrightarrow{L_A} \mathrm{Mat}_{2\times 2} \ : \quad L_A(X) = A\cdot X \tag{2}$$

$$\mathrm{Mat}_{2\times 2} \xrightarrow{R_A} \mathrm{Mat}_{2\times 2} \ : \quad R_A(X) = X\cdot A \tag{3}$$

$$\mathrm{Mat}_{2\times 2} \xrightarrow{\mathrm{Ad}\,_A} \mathrm{Mat}_{2\times 2} \ : \quad \mathrm{Ad}\,_A(X) = A\cdot X\cdot A^{-1} \tag{4}$$

Для каждого из этих операторов найдите его матрицу в базисе (1), вычислите её след и определитель.

A$12\frac{2}{3}$◇2. Пусть в предыдущей задаче **а)** $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **б)** $A = \begin{pmatrix} 19/2 & -15 \\ 9/2 & -7 \end{pmatrix}$. Найдите собственные значения и собственные подпространства операторов (2) – (4) (явно укажите из каких 2×2-матриц состоят эти собственные подпространства).

A$12\frac{2}{3}$◇3. Рассмотрим на пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ квадратичную форму $\det(X)$. Напишите её матрицу Грама в базисе (1) и найдите сигнатуру этой формы.

A$12\frac{2}{3}$◇4. Обозначим через W пространство квадратичных форм от двух переменных (x_1, x_2) с базисом

$$X_{11} = x_1^2 \qquad X_{12} = 2\,x_1x_2 \qquad X_{22} = x_2^2 \tag{5}$$

Свяжем с данной матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2$ оператор

$$W \xrightarrow{S_A^2} W \ : \ S_A^2 f(x_1, x_2) = f\left(A\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

Найдите его матрицу в базисе (5), вычислите её след и определитель.

A$12\frac{2}{3}$◇5. Для матриц A из зад. A**$12\frac{2}{3}$**◇2 найдите собственные значения и собственные подпространства оператора S_A^2 из предыдущей задачи (явно укажите из каких квадратичных форм они состоят).

A$12\frac{2}{3}$◇6. Запишем характеристический многочлен матрицы $X \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}$ в виде

$$\det(tE - X) = t^3 + \sigma_1(X)\,t^2 + \sigma_2(X)\,t + \sigma_3(X)\ .$$

Покажите, что $\sigma_2(X)$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_{3\times 3}$ и вычислите её ранг и сигнатуру.

A$12\frac{2}{3}$◇7. В условиях предыдущей задачи вычислите (для всех возможных сочетаний индексов) частные производные: **а)** $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}\det(X)$ **б)** $\dfrac{\partial^2}{\partial x_{ij}\partial x_{k\ell}}\det(X)$ **в)** $\dfrac{\partial^3}{\partial x_{ij}\partial x_{k\ell}\partial x_{mn}}\det(X)$

A$12\frac{2}{3}$◇8*. Чему равна частная производная k-того порядка от определителя $n\times n$-матрицы X

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1j_1}\dots\partial x_{i_kj_k}}\det(X)$$

в зависимости от месторасположения элементов, по которым производится дифференцирование?