Операторы на пространствах со скалярным произведением

A12◇1. Докажите, что если ограничение билинейной формы[1] β с пространства V на подпространство $U \subset V$ невырождено, то $V = U \oplus U^{\perp}$, где $U^{\perp} = \{w \in V \mid \beta(u,w) = 0 \;\; \forall u \in U\}$.

A12◇2. Введём на пространстве многочленов $\mathbb{R}[x,y,z]$ скалярное произведение, так чтобы базисные мономы $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$ были попарно ортогональны со скалярными квадратами $\alpha!\beta!\gamma!$.

а) Найдите оператор, сопряженный[2] оператору Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

б) Покажите, что подпространство P_m однородных многочленов степени m раскладывается в прямую сумму $P_m = H_m \oplus \varrho^2 H_{m-2} \oplus \varrho^4 H_{m-4} \oplus \;\cdots$, где $H_m = \{f \in P_m \mid \Delta f \equiv 0\}$ и $\varrho^2 \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 \in P_2$.

A12◇3. Для любого ли оператора A операторы A^*A и $A\,A^*$ будут:

а) самосопряжены? **б)** неотрицательны[3]? **в)** положительны?

A12◇4. Всегда ли ортогональные дополнения к инвариантным подпространствам оператора A инвариантны относительно A^*?

A12◇5. Справедливо ли равенство $(\ker A)^{\perp} = \operatorname{im} A^*$?

A12◇6. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ (сумма не обязательно ортогональная) и оператор A проектирует V на V_1 вдоль V_2. Верно ли, что $V = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$ и A^* проектирует V на $V_2^{\perp}$ вдоль $V_1^{\perp}$?

A12◇7 (теорема Шура). Докажите, что в эрмитовом пространстве каждый оператор имеет верхнетреугольную матрицу в подходящем ортонормальном базисе[4]

A12◇8 (нормальные операторы). Установите все истинные импликации между следующими свойствами оператора A на эрмитовом или евклидовом пространстве:

а) $A \cdot A^* = A^* \cdot A$ (такие операторы называются *нормальными*)

б) всякий собственный вектор A собственен и для A^*;

в) ортогонал любого A-инвариантного подпространства A-инвариантен;

г) всякое A-инвариантное подпространство A^*-инвариантно;

д) матрица A диагональна в некотором ортогональном базисе.

е) $||Av|| = ||A^*v|| \quad \forall v \in V$ **ж)** $A_+A_- = A_-A_+$, где $A = A_+ + A_-$ и $A_+ = A_+^*$, $A_- = -A_-^*$.

A12◇9. Докажите, что любое множество попарно перестановочных нормальных операторов одновременно приводится к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе.

A12◇10. Докажите, что уравнение $X^k = A$ с произвольным нормальным A разрешимо относительно X в области нормальных операторов. Много ли у него нормальных решений? Можно ли искать такое решение в виде многочлена от A?

A12◇11. Докажите, что для любого унитарного оператора A в эрмитовом пространстве и любого натурального k существует унитарный оператор B, являющийся многочленом от A, и такой, что $B^k = A$.

A12◇12 (полярное разложение). Постройте для любого невырожденного оператора A разложения $A = I_1S_1 = S_2I_2$, в которых I_1, I_2 изометрии, а S_1, S_2 самосопряжены и положительны, и докажите, что в каждом из них I и S определяются по A однозначно.

A12◇13. Найдите полярное разложение операторов: **а)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

A12◇14. Равносильны ли нормальности A такие свойства его полярного разложения:

а) $I_1 = I_2$ и $S_1 = S_2$; **б)** I_1 и S_1 перестановочны; **в)** I_2 и S_2 перестановочны.

---

[1]без каких-либо предположений о её (косо) симметричности

[2]оператор $V \xrightarrow{F^*} V$ называется *сопряжённым* к оператору $V \xrightarrow{F} V$, если $\forall\, u,v \in V$ $(F^*(u),v) = (u,F(v))$

[3]линейный оператор $V \xrightarrow{B} V$ называется *неотрицательным* (соотв. *положительным*), если $\forall\, v \neq 0$ $(Bv,v) \geqslant 0$ (соотв. $(Bv,v) > 0$)

[4]и в частности, обладает инвариантными подпространствами любой промежуточной размерности