

### Евклидова геометрия

**A11◊1.** Найдите в  $\mathbb{R}^n$  ГМТ равноудаленных от заданных точек  $p_0, p_1, \dots, p_k$ , не лежащих в одной  $(k - 1)$ -мерной плоскости. Вокруг всякого ли  $k$ -мерного симплекса можно описать  $(k - 1)$ -мерную сферу и если можно, то сколько?

**A11◊2 (куб).** В стандартном  $n$ -мерном кубе  $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1\}$  найдите:

- а) количество вершин, рёбер, 2-мерных граней,  $\dots$ ,  $(n - 1)$ -мерных граней
- б) количество 1-мерных осей и  $(n - 1)$ -мерных гиперплоскостей симметрии
- в) количество диагоналей, ортогональных заданной диагонали
- г) длину диагонали и ее предел при  $n \rightarrow \infty$
- д) радиус описанного шара и его предел при  $n \rightarrow \infty$
- е) всевозможные углы между диагоналями и рёбрами, а также их пределы при  $n \rightarrow \infty$
- ж) углы между диагоналями и всевозможными  $m$ -мерными гранями
- з) в каком отношении делят диагональ ортогональные проекции всех вершин

**A11◊3 (симплекс).** В стандартном  $n$ -мерном симплексе  $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i > 0, \sum x_i = 1\}$  найдите:

- а) количество вершин, рёбер, 2-мерных граней,  $\dots$ ,  $(n - 1)$ -мерных граней
- б) расстояние между противоположными  $m$  и  $(n - m - 1)$ -мерными гранями.
- в\*) углы между любыми парами граней      г\*) радиусы вписанного и описанного шаров

**A11◊4.** Найдите  $\min \int_{-1}^1 P^2(x) dx$  по всем  $P \in \mathbb{R}[x]$  с  $\deg P \leq k$  и старшим коэффициентом 1.

**A11◊5.** Найдите ближайший к  $\sin x$  кубический многочлен в пространстве гладких функций на  $[0, \pi]$  со скалярным произведением  $(P, Q) = \int_0^\pi P(x)Q(x) dx$ .

**A11◊6.** Покажите, что  $\text{tr}(AB^t)$  является евклидовым скалярным произведением на пространстве вещественных квадратных матриц, и найдите ортогональное дополнение к:

- а) бесследным; б) симметричным; в) верхнетреугольным; г) кососимметричным матрицам.

**Матрица Грама** произвольной системы векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — это квадратная матрица  $G_v$ , составленная из всевозможных попарных произведений  $(v_i, v_j)$ .

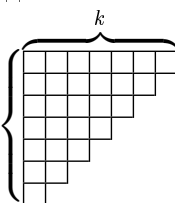
**A11◊7.** Наборов векторов  $v_i$ , выражается через набор векторов  $w_j$  по формуле  $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m) \cdot C_{w,v}$ , где  $C_{w,v}$  — некоторая  $n \times m$ -матрица. Выразите  $G_v$  через  $G_w$ .

**A11◊8 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца).** Покажите, что  $\det G_v \geq 0$  для любого набора векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , и равенство равносильно тому, что набор линейно зависим. Выведите отсюда, что для любой пары векторов  $(v_1, v_2)^2 \leq (v_1, v_1)(v_2, v_2)$  и равенство равносильно тому, что векторы пропорциональны.

**A11◊9.** Выразите объем параллелепипеда, натянутого на векторы  $v_i$  через  $\det G_v$ .

**A11◊10.** Выразите расстояние от конца вектора  $v$  до гиперплоскости, порожденной векторами  $e_1, e_2, \dots, e_k$  через  $\det G_{v,e_1,\dots,e_k}$  и  $\det G_{e_1,e_2,\dots,e_k}$ .

**A11◊11.** Обозначим через  $\Pi_k^n = \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1}$  количество кубиков в  $n$ -мерной ступенчатой пирамиде высоты  $k$ , образованной  $k$  ступенчатыми  $(n - 1)$ -мерными пирамидами убывающей высоты, поставленными в стопку вдоль  $n$ -той координатной оси (например, 2-

мерная пирамида высоты  $k$  — это  $\Pi_k^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \dots + \Pi_k^1 = k$  ). Выразите  $\Pi_k^n$

через  $n, k$  и найдите отношение объёма параллелепипеда к объёму натянутого на его вершину и все соседние с ней вершины симплекса.