Евклидова геометрия. Дополнительные задачи.

A$11\frac{1}{2}$◇1. Сравните результаты ортогонализации стандартного базиса $\{x^\nu\}$ пространства $\mathbb{R}[x]$ относительно скалярных произведений

а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$ **б)** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **в)** $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$ **г)** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$?

с семействами многочленов Лаггера, Эрмита, Лежандра и Чебышева[1]:

1) $L_n(x) = e^x \frac{d^n\left(e^{-x}x^n\right)}{dx^n}$ **2)** $E_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ **3)** $P_n(x) = \frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$ **4)** $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

A$11\frac{1}{2}$◇2. Для данных k точек $p_1, p_2, \dots, p_k$ обозначим через $\Delta_{p_1,p_2,\dots,p_k} \overset{\text{def}}{=} \det(|p_ip_j|^2)$ определитель $k\times k$-матрицы, образованной квадратами расстояний между точками, а через $\Gamma_{p_1,p_2,\dots,p_n}$ — определитель матрицы размера $(k+1)\times(k+1)$, полученной приписыванием к предыдущей матрице единичной строки и единичного столбца сверху и слева, а также нуля в левом верхнем углу. Покажите, что **а)** $\Gamma_{p_0,p_1,\dots,p_n} = G_{\overrightarrow{x_0x}_1,\overrightarrow{x_0x}_2,\dots,\overrightarrow{x_0x}_n}$, где G — определитель Грама;

б) $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ лежат в $(n-1)$-мерной гиперплоскости $\iff \Gamma_{p_0,p_1,\dots,p_n} = 0$;

в) квадрат радиуса шара, описанного вокруг симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ равен $-\frac{1}{2}\frac{\Delta_{p_0,p_1,\dots,p_n}}{\Gamma_{p_0,p_1,\dots,p_n}}$;

г) $(n+2)$ точки $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда лежат на $(n-1)$-мерной сфере или гиперплоскости[2], когда $\Delta_{p_0,p_1,\dots,p_{n+1}} = 0$.

A$11\frac{1}{2}$◇3. Свяжем с каждой центрально симметричной относительно нуля ограниченной выпуклой фигурой $K \subset \mathbb{R}^n$, содержащей некоторую окрестность нуля, функцию от вектора $v \in \mathbb{R}^n$ по правилу $|v|_K \overset{\text{def}}{=} \inf\{\lambda \geqslant 0 \mid v \in \lambda\cdot K\}$ и положим $\varrho_K(p,q) = |\overrightarrow{pq}|_K$. Докажите, что

а) ϱ_K является однородной и инвариантной относительно сдвигов[3] метрикой на $\mathbb{R}^n$;

б) правило $K \longleftrightarrow \varrho_K$ устанавливает биекцию между центрально симметричнными относительно нуля ограниченными выпуклыми фигурами, содержащими нуль вместе с некоторой окрестностью, и однородными инвариантными относительно сдвигов метриками;

в) метрика ϱ_K индуцируется некоторым скалярным произведением, если и только если для любых двух векторов $v, w \in \mathbb{R}^n$ верно соотношение[4] $|v+w|_K^2 + |v-w|_K^2 = 2\left(|v|_K^2 + |w|_K^2\right)$.

г) Приведите пример фигуры K, задающей на $\mathbb{R}^n$ однородную инвариантную относительно сдвигов метрику, не индуцированную никаким скалярным произведением.

A$11\frac{1}{2}$◇4*. Рассмотрим евклидову метрику на $\mathbb{R}^n$ как функцию двух переменных

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\ \varrho\ } \mathbb{R} \;:\; \varrho(x,y) = \sqrt{(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy})}\,.$$

Докажите, что она дифференцируема[5], и ее производная в точке (p,q) действует на касательный вектор $\tau = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ по формуле $\varrho'_{(p,q)}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{pq}\,,\ \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v})\,/\,\varrho(p,q) = |\overrightarrow{w}|\cos(\varphi) - |\overrightarrow{v}|\cos(\psi)$, где φ — угол между векторами $\overrightarrow{w}$ и $\overrightarrow{pq}$, а ψ — между $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{pq}$.

---

[1] т. е. выясните, содержится ли результат ортогонализации в списке (1)–(4), и если да, то под каким номером

[2] при $n = 2$ получается условие на расстояния между четырьмя точками плоскости, необходимое и достаточное для того, чтобы эти 4 точки лежали на одной прямой или окружности

[3] метрика ϱ на $\mathbb{R}^n$ называется однородной и инвариантной относительно сдвигов, если $\varrho(A,B)$ зависит только от вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\varrho(\lambda\overrightarrow{AB}) = |\lambda|\varrho(\overrightarrow{AB})$ для любого $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$

[4] т. е. сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин четырёх его сторон

[5] отображение $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $p \in \mathbb{R}^n$, если для любого вектора $\tau \in \mathbb{R}^n$ имеет место разложение $f(p+\tau) = f(p) + f'_p(\tau) + o(\tau)$, где $f'_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ есть *линейный оператор* между векторными пространствами, зависит только от точки p и функции f (он называется *производной* отображения f в точке p), а отображение $o : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ таково, что $|o(\tau)|/|\tau| \to 0$ при $|\tau| \to 0$; в этой ситуации $\tau \in \mathbb{R}^n$ называется *касательным вектором* к $\mathbb{R}^n$ в точке p