Векторные пространства.

A7◇1. Найдите размерности и базисы суммы и пересечения пары подпространств в $\mathbb{Q}^4$:

а) натянутых на $\Big\{(1,1,1,1),\ (1,-1,1,-1),\ (1,3,1,3)\Big\}$ и $\Big\{(1,2,0,2),\ (1,2,1,2),\ (3,1,3,1)\Big\}$

б) натянутого на $\Big\{\ (1,1,0,0)\ ,\ (0,1,1,0)\ ,\ (0,0,1,1)\ \Big\}$ и заданного уравнениями $x_1+x_3 = 2x_2+x_3+x_4 = x_1+2x_2+x_3+2x_4 = 0$

в) заданных уравнениями $x_1+x_2 = x_2+x_3 = x_3+x_4 = 0$ и $x_1+2x_2+2x_4 = x_1+2x_2+x_3+2x_4 = 3x_1+x_2+3x_3+x_4 = 0$.

A7◇2. Является ли прямой сумма подпространства, натянутого в $\mathbb{Q}^4$ на векторы $(1,1,1,1)$, $(-1,-2,0,1)$, и подпространства решений системы $x_3-x_1-x_2-x_4 = 2x_1+2x_2+x_4 = 0$? Если да, найдите проекции стандартных базисных векторов $\mathbb{Q}^4$ на первое из них вдоль второго.

A7◇3. Те же вопросы про подпространства, заданные в $\mathbb{Q}^n$ уравнением $x_1+x_2+\cdots+x_n = 0$ и системой $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

A7◇4. Найдите размерность пространства однородных симметрических[1] многочленов степени 10 от 4 переменных.

A7◇5. Какова размерность пространства многочленов $f\in\mathbb{R}[x]$ степени $\leqslant n$, обращающихся в нуль в точке **а)** $\sqrt{2}$ **б)** $(3-2i)\in\mathbb{C}$?

A7◇6. Верно ли, что векторное подпространство $V\subset\mathbb{Q}[t]$, содержащее хотя бы по одному многочлену каждой из степеней $0,\ 1,\ \dots,\ m$, содержит *все* многочлены степени $\leqslant m$?

A7◇7. Найдите все $f\in\mathbb{Q}[x]$ с $\deg f = 3$ и $f(i) = i$ для $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

A7◇8 (формула Тейлора). Зафиксируем точку $a\in\mathbb{Q}$ и рассмотрим $m+1$ отображений $\Bbbk[x]\xrightarrow{\varphi_k}\Bbbk$, $k = 0,\ 1,\ \dots,m$, сопоставляющих многочлену f значения $f^{(k)}(a)$ его производных в точке a. Покажите, что они образуют базис пространства V_m^*, двойственного к пространству $V_m\subset\mathbb{Q}[x]$ многочленов степени $\leqslant m$, и постройте в V_m двойственный базис.

A7◇9. Найдите все $f\in\mathbb{C}[x]$ с $\deg f = 3$ и $f(i) = 0$, $f'(i) = 1$, $f''(i) = 2$ и $f'''(i) = 3$.

A7◇10 (пространство функций). Пусть M — множество из m элементов, $\Bbbk$ — любое поле. Покажите, что функции $M\longrightarrow\Bbbk$ образуют векторное пространство над $\Bbbk$, найдите его размерность и укажите в нём какой-нибудь базис.

A7◇11*. Будут ли функции $1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^p$ линейно зависимы в пространстве

а) функций $\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ **б)** функций $\mathbb{F}_p\longrightarrow\mathbb{F}_p$.

A7◇12* (пространство подмножеств). Покажите, что множество всех подмножеств данного m-элементного множества M образует векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$ относительно операций $X+Y\overset{\text{def}}{=}(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$, $1\cdot X\overset{\text{def}}{=}X$, и $0\cdot X\overset{\text{def}}{=}\varnothing$, найдите его размерность и постройте в нём какой-нибудь базис.

A7◇13* (пространство чисел). Рассмотрим $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

а) Конечна ли его размерность? **б)** Зависимы ли линейно $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$?

A7◇14. В n-мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов найдите количество всех: **а)** векторов **б*)** базисов **в*)** k-мерных подпространств.

A7◇15. Покажите, что число элементов конечного поля является степенью его характеристики.

A7◇16. Может ли поле из 4 элементов быть подполем поля из **а)** 8 **б)** 27 элементов?

A7◇17*. Обозначим через $G_{(k,n)}(q)$ рациональную функцию от q, дающую ответ к зад. A7◇14в). Найдите $\lim\limits_{q\to 1}G_{(k,n)}(q)$ и выясните, не является ли $G_{(k,n)}(q)$ многочленом.

---

[1] многочлен $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ называется *симметрическим*, если $f\left(x_{\sigma(1)},\,x_{\sigma(2)},\,\dots,\,x_{\sigma(n)}\right) = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ для любой перестановки $\sigma\in\mathfrak{S}_n$; например x^2y+xy^2 — симметрический многочлен от x,y, а x^3+xy^2 — нет