Делимость, многочлены и алгебраические числа.

А6◇1. Найдите все целые решения уравнения $28\,x + 30\,y + 31\,z = 365$.

А6◇2. Решите в $\mathbb{Z}/(360)$ уравнения **а)** $x^2 = 1$ **б*)** $x^3 = 1$ **в*)** $x^2 = 49$.

А6◇3. Найдите в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен наименьшей степени, дающий остатки $1 + x$, $1 + x^2$ и $1 + x^3$ от деления на $1 + x^2$, $1 + x^3$ и $1 + x^4$ соответственно.

А6◇4. Найдите в $\mathbb{Q}[x]$ остатки от деления $x^{179} + x^{57} + 1$ на: **а)** $x^2 - 1$ **б)** $x^2 + 1$ **в)** $x^2 + x + 1$.

А6◇5. Покажите, что кольцо $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 2)$ является полем, и найдите в нём число, обратное к числу $1 + \sqrt[4]{2} + \left(\sqrt[4]{2}\right)^2$.

А6◇6. Может ли неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ иметь кратный корень в $\mathbb{C}$?

А6◇7. Докажите, что K/I является полем тогда и только тогда, когда идеал I не содержится ни в каком строго большем идеале, отличном от K (такие идеалы I называются *максимальными*).

А6◇8. Являются ли $\mathbb{Q}[x, y]$ и $\mathbb{Z}[x]$ кольцами главных идеалов?

А6◇9. Пусть $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ не имеют общих делителей, отличных от ± 1. Может ли фактор кольцо $\mathbb{Z}[x]/(f, g)$ быть бесконечным?

А6◇10. Выпишите все неприводимые многочлены степени $\leqslant 3$ из $\mathbb{F}_2[x]$ и $\mathbb{F}_3[x]$.

А6◇11. Постройте поле из **а)** 8 **б)** 9 элементов, составьте его таблицу умножения, и опишите действие на нём гомоморфизма Фробениуса.

А6◇12*. Покажите, что кольца

а) $\mathbb{Z}[i] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$

б) $\mathbb{Z}[\omega] \stackrel{\text{def}}{=} \{ a + b\omega \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\,,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0 \,\}$

являются евклидовыми относительно высоты $\nu(z) = |z|^2$.

А6◇13. Найдите все автоморфизмы поля $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)$.

А6◇14*. Есть ли среди фактор колец кольца $\mathbb{Z}[i]$ поле характеристики **а)** 2 **б)** 3? Если да, то сколько в нём может быть элементов?

А6◇15*. При каком простом p существует ненулевой гомоморфизм $\mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/(p)$?