Комплексные числа.

A4◇1. Вычислите[1]: **а)** $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; **б)** $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; **в)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; **г)** $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^k$.

A4◇2. Решите уравнения: **а)** $z^2+(2i-7)z+(13-i)=0$; **б)** $z^3=i$; **в)** $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; **г)** $(z+i)^n+(z-i)^n=0$; **д)** $\overline{z}=z^3$.

A4◇3. Пусть $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$. Выразите $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ и $\operatorname{Arg} z$ числа $z=(x+iy)^n$ через φ; далее выразите: **а)** $\sin 5\varphi$ через $\sin\varphi$; **б)** $\cos\left(2\pi/5\right)$ и $\sin\left(4\pi/5\right)$ в радикалах.

A4◇4*. Пусть $m\in\mathbb{N}$ — нечётно. Убедитесь, что $\sin mx/\sin x$ является многочленом от $\sin^2 x$. Найдите его степень, корни и старший коэффициент. Справедливы ли тождества:

а) $\dfrac{\sin(mx)}{\sin x}=(-4)^{\frac{m-1}{2}}\prod\limits_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(\sin^2 x-\sin^2\left(2\pi j/m\right)\right)$;

б) $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin(mx)=2^{m-1}\prod\limits_{j=0}^{m-1}\sin\left(x+2\pi j/m\right)$.

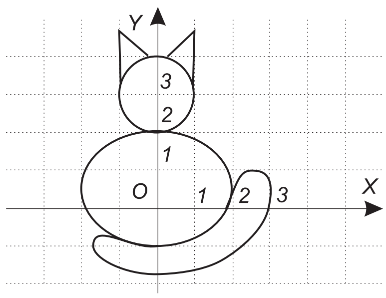

Рис. 1 - 1. Комплексная кошечка.

A4◇5. Вычислите z^m+1/z^m, если $z+1/z=2\cos\theta$.

A4◇6. Пусть натуральные числа m и n представляются в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Представьте в таком виде произведение mn.

A4◇7. Куда переводятся отображениями $z\mapsto z^2$ и $z\mapsto\frac{1}{z}$:
а) прямая $y=kx$; **б)** окружность $|z+i|=1$;
в) декартова и полярная координатные сетки; **г)** кошечка с рис. 1 - 1?

A4◇8. Всегда ли вещественная и мнимая части корня квадратного уравнения с комплексными коэффициентами выражаются в радикалах через вещественные и мнимые части коэффициентов уравнения?

A4◇9. Вычислите сумму и произведение **а)** всех корней **б)** s-тых степеней всех корней степени n из 1.

A4◇10. Вычислите суммы: **а)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots$; **б)** $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots$;
в) $\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{5}+\frac{1}{9}\binom{n}{9}+\cdots$; **г)** $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$;
д) $\sin^2 x+\sin^2 3x+\cdots+\sin^2(2n-1)$; **е)** $\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx$.

A4◇11. Верно ли, что попарно разные $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ вещественно?

A4◇12. Верно ли, что четыре попарно разные точки $z_1, z_2, z_3, z_4\in\mathbb{C}$, не лежащие на одной прямой, тогда и только тогда лежат на одной окружности, когда их *двойное отношение* $\dfrac{(z_1-z_3):(z_2-z_3)}{(z_1-z_4):(z_2-z_4)}$ вещественно?

A4◇13. Докажите, что отображение $z\longmapsto(az+b)/(cz+d)$ (где $a,b,c,d\in\mathbb{C}$) переводит окружности и прямые или в окружности или в прямые, сохраняя при этом углы.

A4◇14. Верно ли, что всякое комплексное число $z\neq-1$ с $|z|=1$ можно представить в виде $z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$ с $t\in\mathbb{R}$?

[1] т. е. найдите вещественную и мнимую часть, модуль, аргумент и по возможности точно нарисуйте