

## Комплексные числа.

**A4◇1.** Вычислите<sup>1</sup>: а)  $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$ ; б)  $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ ; в)  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$ ; г)  $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^k$ .

**A4◇2.** Решите уравнения: а)  $z^2 + (2i-7)z + (13-i) = 0$ ; б)  $z^3 = i$ ;  
в)  $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$ ; г)  $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$ ; д)  $\bar{z} = z^3$ .

**A4◇3.** Пусть  $x = \cos\varphi$ ,  $y = \sin\varphi$ . Выразите  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $|z|$  и  $\operatorname{Arg} z$  числа  $z = (x+iy)^n$  через  $\varphi$ ; далее выразите: а)  $\sin 5\varphi$  через  $\sin\varphi$ ; б)  $\cos(2\pi/5)$  и  $\sin(4\pi/5)$  в радикалах.

**A4◇4\*.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$  — нечётно. Убедитесь, что  $\sin mx / \sin x$  является многочленом от  $\sin^2 x$ . Найдите его степень, корни и старший коэффициент. Справедливы ли тождества:

а)  $\frac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} (\sin^2 x - \sin^2(2\pi j/m))$ ;

б)  $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod_{j=0}^{m-1} \sin(x + 2\pi j/m)$ .

**A4◇5.** Вычислите  $z^m + 1/z^m$ , если  $z + 1/z = 2\cos\theta$ .

**A4◇6.** Пусть натуральные числа  $m$  и  $n$  представляются в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Представьте в таком виде произведение  $mn$ .

**A4◇7.** Куда переводятся отображениями  $z \mapsto z^2$  и  $z \mapsto \frac{1}{z}$ :

- а) прямая  $y = kx$ ; б) окружность  $|z+i| = 1$ ;  
в) декартова и полярная координатные сетки; г) кошечка с рис. 1 - 1?

**A4◇8.** Всегда ли вещественная и мнимая части корня квадратного уравнения с комплексными коэффициентами выражаются в радикалах через вещественные и мнимые части коэффициентов уравнения?

**A4◇9.** Вычислите сумму и произведение а) всех корней б)  $s$ -тых степеней всех корней степени  $n$  из 1.

**A4◇10.** Вычислите суммы: а)  $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$ ; б)  $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots$ ;

в)  $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{5} + \frac{1}{9}\binom{n}{9} + \dots$ ; г)  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ ;

д)  $\sin^2 x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2(2n-1)$ ; е)  $\cos x + 2\cos 2x + \dots + n\cos nx$ .

**A4◇11.** Верно ли, что попарно разные  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда  $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$  вещественно?

**A4◇12.** Верно ли, что четыре попарно разные точки  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ , не лежащие на одной прямой, тогда и только тогда лежат на одной окружности, когда их двойное отношение  $\frac{(z_1 - z_3) : (z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4) : (z_2 - z_4)}$  вещественно?

**A4◇13.** Докажите, что отображение  $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$  (где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ) переводит окружности и прямые или в окружности или в прямые, сохраняя при этом углы.

**A4◇14.** Верно ли, что всякое комплексное число  $z \neq -1$  с  $|z| = 1$  можно представить в виде  $z = \frac{1+ti}{1-ti}$  с  $t \in \mathbb{R}$ ?

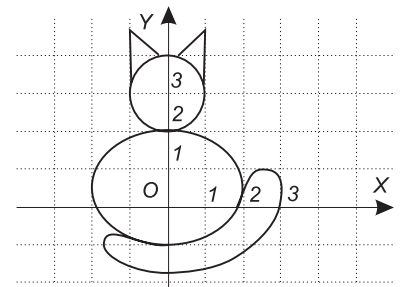


Рис. 1 - 1. Комплексная кошечка.

<sup>1</sup>т. е. найдите вещественную и мнимую часть, модуль, аргумент и по возможности точно нарисуйте