Перестановки.

Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ состоит из всех автоморфизмов (перестановок) n-элементного множества $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Перестановка по кругу каких-либо m попарно различных элементов[1]:

$$i_1 \longmapsto i_2 \longmapsto i_3 \longmapsto \cdots \longmapsto i_{m-1} \longmapsto i_m \longmapsto i_1 \qquad (*)$$

с сохранением на месте всех остальных элементов, называется *циклом* длины m. Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Перестановка σ, такая что $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$, называется *отражением* (например, любая транспозиция является отражением). Чётные перестановки[2] образуют в $\mathfrak{S}_n$ подгруппу, которая [3] обозначается $\mathfrak{A}_n$. Мы записываем перестановки $M_n \xrightarrow{\sigma} M_n$ строчками $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, в которых $\sigma_k = \sigma(k)$.

А2◇1° (чётность перестановки). Скажем, что в перестановке $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ элементы σ_k и σ_m образуют *инверсную пару*, если $k < m$, но $\sigma_k > \sigma_m$. Пусть перестановка σ является композицией t транспозиций. Докажите, что чётность t совпадает с чётностью числа инверсных пар. Что происходит с чётностями при композиции?

А2◇2. Найдите чётность перестановки $(n, (n-1), \dots, 1)$.

А2◇3. Найдите чётность «тасующей перестановки» $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой каждый из двух наборов номеров $\{i_\nu\}, \{j_\mu\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ возрастает слева направо.

А2◇4. Вычислите 100-ю степень перестановки $(3, 5, 4, 1, 2)$.

А2◇5. Верно ли, что любой цикл длины $\geqslant 3$ является композицией двух отражений?

А2◇6. Сколько имеется перестановок, распадающихся в композицию m_1 циклов длины 1, m_2 циклов длины 2, m_3 циклов длины 3, $\dots$, m_k циклов длины k (все циклы не пересекаются)?

А2◇7 (Н. Н. Константинов). В городе N разрешаются лишь простые («двусторонние[4]») квартирные обмены, причём в течение одного дня каждому жителю разрешается сделать не более одного обмена. Можно ли за два дня осуществить любой, сколь угодно сложный обмен[5]?

А2◇8 (порядок элемента). Покажите, что для любой перестановки σ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\sigma^k = \mathrm{Id}$ (наименьшее такое k называется *порядком* перестановки). Верно ли, что порядок нацело делит все прочие k с таким свойством?

А2◇9. Что можно сказать о порядке перестановки $\sigma\tau$, если порядок $\tau\sigma$ равен n?

А2◇10. Что можно сказать о чётности порядка произвольной нечётной перестановки?

А2◇11. Порождается ли[6] $\mathfrak{S}_n$ транспозицией (12) и циклом[7] $(123\dots n)$?

А2◇12. Порождается ли $\mathfrak{A}_n$ 3-циклами (123), (124), $\dots$, $(12n)$?

А2◇13*. Из игры «15» выковыряли фишки «1» и «2», поменяли их местами и засунули обратно. Удастся ли вернуть такую позицию в исходное положение, следуя правилам игры?

А2◇14* (Л. Г. Макар-Лиманов). Торговец газировкой коротает время манипулируя пятнадцатью одноразовыми стаканчиками, сложенными перед ним в несколько стопок. Одна манипуляция заключается в том, что он берёт верхний стаканчик из каждой стопки и составляет из них новую стопку[8]. Как разложатся стаканчики после 2008 таких манипуляций?

---

[1] числа $i_1, i_2, \dots, i_m$ могут быть любыми, не обязательно соседними или возрастающими

[2] перестановка называется *чётной*, если её можно представить в виде композиции чётного числа транспозиций

[3] по историческим причинам она часто называется *знакопеременной подгруппой*

[4] т. е. такие, при которых A въезжает в квартиру, принадлежавшую B, а B — в квартиру, принадлежавшую A; более сложные цепочки обменов, например, когда A въезжает в квартиру, принадлежавшую B, B — в квартиру, принадлежавшую C, а уже C — в квартиру, принадлежавшую A, запрещены

[5] т. е. произвольный автоморфизм множества квартир

[6] говорят, что группа $\mathfrak{G}$ порождается преобразованиями $g_1, g_2, \dots, g_k \in \mathfrak{G}$, если любой элемент из $\mathfrak{G}$ можно представить в виде композиций этих преобразований

[7] здесь и далее мы обозначаем цикл вида $(*)$ строчкой $(i_1 i_2 \dots i_m)$ (без запятых)

[8] «стопка» может состоять из единственного стакана, который и будет в этом случае «верхним»