§2. Комплексификация и овеществление.

2.1. Овеществление. Всякое n-мерное комплексное векторное пространство W можно рассматривать и как векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Получающееся таким образом вещественное векторное пространство называется *овеществлением* комплексного пространства W и обозначается $W_{\mathbb{R}}$.

Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляли базис W над $\mathbb{C}$, то векторы

$$e_1, e_2, \dots, e_n,\ ie_1, ie_2, \dots, ie_n \tag{2-1}$$

будут составлять базис $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, поскольку единственность разложения произвольного $w \in W$ в виде

$$w = \sum (x_\nu + i\,y_\nu) \cdot e_\nu \quad \text{с} \quad (x_\nu + i\,y_\nu) \in \mathbb{C} \tag{2-2}$$

равносильна единственности разложения того же вектора в виде

$$w = \sum x_\nu \cdot e_\nu + \sum y_\nu \cdot ie_\nu \quad \text{с} \quad x_\nu,\, y_\nu \in \mathbb{R}\ . \tag{2-3}$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2\, \dim_{\mathbb{C}} W$, где мы для избежания недоразумений пишем $\dim_{\mathbb{R}}$ и $\dim_{\mathbb{C}}$ для обозначения размерности векторных пространств над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Отметим, в частности, что вещественные векторные пространства, возникающие как овеществления комплексных, всегда чётномерны.

2.1.1. Сравнение линейных групп. Все комплексно линейные операторы $W \xrightarrow{F} W$ составляют алгебру $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ над полем $\mathbb{C}$, а все вещественно линейные операторы $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{G} W_{\mathbb{R}}$ образуют алгебру $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ над полем $\mathbb{R}$, содержащую алгебру комплексно линейных эндоморфизмов в качестве подалгебры

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})\ .$$

Чтобы явно описать эту подалгебру в матричных терминах, зафиксируем базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n \tag{2-4}$$

пространства W над $\mathbb{C}$ и индуцированный базис (2-1) пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Алгебра $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ отождествится при этом с алгеброй $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера $n \times n$, а алгебра $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ отождествится с алгеброй $\mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $(2n) \times (2n)$. Будем записывать вещественные матрицы в блочном виде

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2-5}$$

в соответствии с разбиением базиса (2-1) на два набора по n векторов $\{e_\nu\}$ и $\{ie_\nu\}$. Вещественно линейный оператор G с матрицей (2-5) является комплексно линейным тогда и только тогда, когда $F(iw) = iF(w)$ для всех $w \in W_{\mathbb{R}}$. Ясно, что это условие достаточно проверять только на вещественных базисных векторах e_ν и ie_ν. Мы получаем:

2.1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (УСЛОВИЯ КОШИ–РИМАНА). *Вещественно линейный оператор* (2-5) *тогда и только тогда комплексно линеен, когда $C = B$ и $D = -A$. При этом в базисе* (2-4) *пространства W над $\mathbb{C}$ такой оператор будет задаваться комплексной $n \times n$-матрицей $A + iB$.* □

2.1.3. Пример: комплексно дифференцируемые функции $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$. Пусть $W = \mathbb{C}$, $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, комплексный базис (2-4) — это $e = 1$ и ассоциированный вещественный базис (2-1) — это $\{1, i\}$. Комплексно линейный оператор $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ в этом случае есть просто оператор умножения на какое-нибудь ненулевое комплексное число $z = a + ib$. В базисе $\{1, i\}$ такой оператор записывается 2×2-матрицей

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\ .$$

Произвольную функцию $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ можно воспринимать либо как функцию $w = f(z)$ одной комплексной переменной, либо — полагая $w = u + iv$ и $z = x + iy$ с $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ — как пару функций двух вещественных переменных

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \ . \end{cases}$$

Напомним, что такая функция называется *комплексно дифференцируемой* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если её приращение (как функции от z) имеет вид

$$f(z_0 + \vartriangle z) = f(z_0) + \zeta \cdot \vartriangle z + o(\vartriangle z) \ , \qquad \text{где} \quad \zeta \in \mathbb{C} \ ,$$

и называется *вещественно дифференцируемой*, если

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \\ v(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} + o(\vartriangle x, \vartriangle y) \ , \quad \text{где} \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ .$$

Несложно проверить, что линейные операторы, описывающие линейную часть приращения, вычисляются через производные:

$$\zeta = f'(z_0) = \lim_{\vartriangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \vartriangle z) - f(z_0)}{\vartriangle z}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

(где $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{\vartriangle x \to 0} \frac{u(x_0 + \vartriangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\vartriangle x}$ и т. п.). Мы заключаем, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно дифференцируемую функцию $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, когда эти функции удовлетворяют дифференциальным *уравнениям Коши–Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

2.2. Комплексификация. С каждым вещественным векторным пространством V канонически связано комплексное векторное пространство, обозначаемое $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} V$ и называемое *комплексификацией* пространства V. Как векторное пространство над $\mathbb{R}$, пространство $V_{\mathbb{C}}$ представляет собой прямую сумму двух экземпляров пространства V

$$V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV \tag{2-6}$$

(в частности, $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} V$). Векторы первого слагаемого обозначаются $1 \cdot v$, или просто v, а векторы второго слагаемого обозначаются $i \cdot v$, или iv (таким образом, равенство $v_1 + iv_2 = w_1 + iw_2$ по определению означает пару равенств $v_1 = w_1$ и $v_2 = w_2$). Определим на вещественном векторном пространстве (2-6) *умножение на комплексные числа* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ формулой:

$$(x + iy) \cdot (v_1 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} (xv_1 - yv_2) + i(yv_1 + xv_2) \in V \oplus iV \ .$$

Упражнение 2.1. Проверьте, что такое умножение действительно наделяет $V_{\mathbb{C}}$ структурой векторного пространства над полем $\mathbb{C}$.

Сравнение разложений (2-3) и (2-2) показывает, что каждый базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V над $\mathbb{R}$ является одновременно базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ (в частности, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$).

2.2.1. Комплексное сопряжение и вещественная структура. На пространстве $V_{\mathbb{C}}$ имеется вещественно линейный автоморфизм

$$\sigma \ : \ V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{w = v_1 + iv_2 \ \mapsto \ \overline{w} = v_1 - iv_2} V_{\mathbb{C}} \qquad (\text{где } v_1, v_2 \in V) \ ,$$

который называется *комплексным сопряжением*. Он удовлетворяет соотношению $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$, и вещественные подпространства V и iV из разложения (2-6) являются его собственными подпространствами с собственными значениями $+1$ и -1 соответственно.

Отметим, что по отношению к умножению на комплексные числа σ не линеен, а *антилинеен*, т. е. удовлетворяет соотношению

$$\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w) \ , \quad \forall\, w \in V_{\mathbb{C}} \ , \ \ \forall\, z \in \mathbb{C} \ .$$

Рассмотрим теперь произвольное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$. Всякий вещественно линейный комплексно антилинейный оператор $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sigma} W_{\mathbb{R}}$, такой что $\sigma^2 = \mathrm{Id}_W$, называется *вещественной структурой* (или *оператором комплексного сопряжения*) на W .

Комплексное векторное пространство W, оснащённое вещественной структурой, канонически отождествляется с комплексификацией

$$W = \mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} V$$

вещественного собственного подпространства $V \subset W_{\mathbb{R}}$ оператора σ, отвечающего собственному значению $+1$.

В самом деле, поскольку σ аннулируется многочленом $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$, всё вещественное пространство $W_{\mathbb{R}}$ распадётся в прямую сумму собственных подпространств

$$W_{\mathbb{R}} = V_+ \oplus V_- \ , \quad \text{где}$$
$$V_+ = \ker(\sigma - \mathrm{Id}) = \mathrm{im}\,(\sigma + \mathrm{Id}) \ , \quad V_- = \ker(\sigma + \mathrm{Id}) = \mathrm{im}\,(\sigma - \mathrm{Id}) \ .$$

Упражнение 2.2. Убедитесь в этом.

Из комплексной антилинейности оператора σ вытекает, что умножения на i и на $-i$ являются взаимно обратными изоморфизмами между собственными подпространствами $V_{\pm}$, поскольку

$$v_+ \in V_+ \ \Rightarrow \ \sigma(v_+) = v_+ \ \Rightarrow \ \sigma(iv_+) = -i\sigma(v_+) = -iv_+ \ \Rightarrow \ iv_+ \in V_-$$
$$v_- \in V_- \ \Rightarrow \ \sigma(v_-) = -v_- \ \Rightarrow \ \sigma(-iv_-) = i\sigma(v_-) = -iv_- \ \Rightarrow \ -iv_- \in V_+ \ .$$

Таким образом, мы получаем над $\mathbb{R}$ каноническое разложение

$$W_{\mathbb{R}} = V \oplus iV \ , \quad \text{где} \quad V \overset{\text{def}}{=} V_+ \ , \quad iV \overset{\text{def}}{=} V_- \ ,$$

что и утверждалось.

Подчеркнём, что на абстрактном векторном пространстве W над полем $\mathbb{C}$ имеется много разных вещественных структур, и никакого естественного предпочтения между ними *a priori* не существует.

2.2.2. Пример: эрмитово сопряжение операторов. Зафиксируем комплексное векторное пространство W с эрмитовым скалярным произведением и рассмотрим комплексное векторное пространство $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ всех комплексно линейных эндоморфизмов W. Операция эрмитова сопряжения $F \longmapsto F^*$ (см. n° 1.5) задаёт на $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ вещественную структуру, вещественным и мнимым подпространствами которой являются самосопряжённые и антисамосопряжённые операторы соответственно: $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) = \mathrm{End}^+_{\mathbb{C}}(W) \oplus \mathrm{End}^-_{\mathbb{C}}(W)$, где $\mathrm{End}^+_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^* = F\}$, $\mathrm{End}^-_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^* = -F\}$, и разложение произвольного оператора в сумму вещественной и мнимой составляющей этой структуры есть ни что иное как разложение в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого: $F = \frac{1}{2}\,(F + F^*) + \frac{1}{2}\,(F - F^*)$.

Упражнение 2.3. Убедитесь, что эрмитово (косо) симметричные матрицы меняют тип симметрии на противоположный при умножении на i, а также что изометрии можно охарактеризовать как операторы, сопряжённые своему обратному $F^* = F^{-1}$.

2.3. Комплексификация линейных операторов. Всякий вещественно линейный оператор $V' \xrightarrow{F} V''$ между вещественными векторными пространствами можно продолжить по линейности до комплексно линейного оператора

$$V'_{\mathbb{C}} \xrightarrow{F_{\mathbb{C}}} V''_{\mathbb{C}} \ ,$$

действующего между комплексифицированными пространствами по правилу

$$F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} F(v_1) + iF(v_2) \ ,$$

Упражнение 2.4. Убедитесь, что $F_{\mathbb{C}}(zw) = zF_{\mathbb{C}}(w) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ и $\forall w \in V'_{\mathbb{C}}$, и что в вещественном базисе $\{e_i\}$ пространства $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ оператор $F_{\mathbb{C}}$ имеет ту же матрицу, что и исходный вещественный оператор F над $\mathbb{R}$.

2.3.1. Комплексные собственные векторы вещественных линейных операторов. Поскольку поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, оператор $F_{\mathbb{C}}$ всегда имеет собственный вектор в пространстве $V_{\mathbb{C}}$. Условие, что комплексный вектор $w = v_1 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с комплексным собственным значением $\lambda = a + ib = \varrho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ означает, что

$$F(v_1) + iF(v_2) = F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2) \ .$$

Таким образом, вещественная линейная оболочка векторов v_1, v_2 в V является инвариантным подпространством для F, и действие F на этом подпространстве в базисе $\{v_1, v_2\}$ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \varrho \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \ .$$

Поскольку матрица оператора $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ в любом базисе, состоящем из векторов, лежащих в $V \subset V_{\mathbb{C}}$, совпадает с матрицей оператора F в том же базисе, оператор $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ имеет тот же самый характеристический многочлен, что и оператор F. Будучи многочленом с вещественными коэффициентами, он вместе с каждым комплексным корнем $\lambda = a + ib$ будет иметь и сопряжённый комплексный корень $\overline{\lambda} = a - ib$. Предыдущее описание показывает, что вектор $w = v_1 + iv_2$ является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ тогда и только тогда, когда сопряжённый вектор $\overline{w} = v_1 - iv_2$ является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжённым собственным значением $\overline{\lambda}$. Оба этих вектора соответствуют одному и тому же вещественному двумерному инвариантному подпространству $U = \mathbb{R} \cdot v_1 \oplus \mathbb{R} \cdot v_2 \subset V$, комплексификация которого является комплексной линейной оболочкой собственных векторов w и $\overline{w}$.

Отметим также, что всякое собственное подпространство оператора $F_{\mathbb{C}}$, отвечающее вещественному собственному значению, является комплексификацией вещественного собственного пространства оператора F той же размерности и с тем же собственным значением.

2.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *Всякий вещественно линейный оператор на вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.* □

2.3.3. Пример: изометрии евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Если оператор $\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n$ сохраняет евклидово скалярное произведение, то ортогональное дополнение к каждому инвариантному подпространству также является инвариантным подпространством. По предыдущему следствию, $\mathbb{R}^n$ распадётся в прямую ортогональную сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств оператора F. Поскольку F сохраняет длину, его действие на одномерных инвариантных подпространствах заключается в умножении на ± 1, а на двумерных инвариантных подпространствах является чистым поворотом (без растяжения). Таким образом мы снова видим (ср. с лекцией 6 модуля III), что любая изометрия евклидова пространства в подходящем *ортонормальном* базисе задётся блочной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \boxed{\Pi(\varphi_1)} & & & & & & & \\ & \boxed{\Pi(\varphi_2)} & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \boxed{\Pi(\varphi_k)} & & & & \\ & & & & \pm 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} ,$$

где 2×2–блоки $\Pi(\varphi_\nu)$ суть матрицы поворотов, и наличие на диагонали -1 равносильно тому, что оператор F меняет ориентацию (т. е. равенству $\det F = -1$).

2.4. Комплексификация билинейных форм. Всякую вещественно билинейную форму

$$V \times V \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}$$

(на вещественном векторном пространстве V) можно продолжить по $\mathbb{C}$-линейности до комплексно билинейной формы

$$V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\beta_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}\,,$$

значения которой на комплексифицированных векторах вычисляются по правилу

$$\beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iu_2, v_1 + iv_2) \overset{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1, v_1) - \beta(u_2, v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, v_2) + \beta(u_2, v_1)\big)\,.$$

Матрица Грама такой формы $\beta_{\mathbb{C}}$ в любом вещественном базисе пространства $V_{\mathbb{C}}$ будет совпадать с матрицей Грама формы β в том же базисе. Если форма β была (косо) симметричной, то такой же будет и её комплексификация $\beta_{\mathbb{C}}$. Отметим однако, что специфический вещественный инвариант формы — её сигнатура — при этом полностью утрачиваются: все невырожденные симметричные $\mathbb{R}$-билинейные формы заданного ранга после комплексификации становятся эквивалентны друг другу. В частности, евклидово скалярное произведение при (комплексно билинейной) комплексификации превращается в невырожденную комплексную квадратичную форму, обладающую изотропным подпространством размерности $[n/2]$.

2.5. Эрмитово продолжение билинейных форм с V на $V_{\mathbb{C}}$. Чтобы оставить возможность заниматься метрической геометрией в пространстве $V_{\mathbb{C}}$, вещественно билинейную форму, задающую скалярное произведение на V, продолжают на $V_{\mathbb{C}}$ не комплексно билинейно, а линейно по первому аргументу и антилинейно по второму[1]

$$\beta_{\mathrm{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \overset{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)\big)\,. \tag{2-7}$$

Форма β_{H} задаёт на пространстве $V_{\mathbb{C}}$ эрмитову структуру и называется *эрмитовым продолжением* вещественно билинейной формы β с V на $V_{\mathbb{C}}$. Значения квадратичной формы ассоциированной с эрмитовым продолжением симметричной формы g автоматически получаются вещественными:

$$g_{\mathrm{H}}(u + iv, u + iv) = g(u, u) + g(v, v) \in \mathbb{R} \quad \forall\,(u + iv) \in V_{\mathbb{C}}\,,$$

а значения квадратичной формы, ассоциированной с эрмитовым продолжением кососимметричной формы ω, будут чисто мнимыми и, вообще говоря, ненулевыми

$$\omega_{\mathrm{H}}(u + iv, u + iv) = 2i\,\omega(u, v) \in i \cdot \mathbb{R} \quad \forall\,(u + iv) \in V_{\mathbb{C}}\,.$$

2.5.1. Пример: эрмитово продолжение евклидовой структуры на вещественном пространстве V представляет собой вещественно билинейное скалярное произведение на комплексифицированный пространстве $V_{\mathbb{C}}$ со свойствами:

$$(w_1, w_2) = \overline{(w_2, w_1)}\,, \quad (w, w) \in \mathbb{R}\ \ \forall\, w \in W\ \ , \quad (w, w) > 0\ \forall\, w \neq 0\,,$$
$$(z\,w_1, w_2) = z\,(w_1, w_2) = (w_1, \overline{z}\,w_2)\ \ \forall\, z \in \mathbb{C}\ \ .$$

Например, комплексификацией координатного пространства $V = \mathbb{R}^n$ является координатное пространство $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$, и эрмитовым продолжением евклидовой структуры $(x, y) = \sum x^\nu y^\nu$ является эрмитова структура $(w, z) = \sum w^\nu \overline{z}^\nu$.

[1] впрочем, в некоторых кругах употребительна зеркальная конструкция: форма продолжается линейно по по второму аргументу и антилинейно по первому, что меняет знак во втором слагаемом формулы (2-7)

Аналогично, комплексификацией пространства вещественных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с евклидовым скалярным произведением

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{2-8}$$

является пространство непрерывных *комплекснозначных* функций на $[a,b]$, и эрмитово продолжение евклидовой структуры (2-8) задаётся формулой[1]

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

2.6. Нормальные операторы в евклидовом пространстве. Нормальные операторы в вещественном евклидовом пространстве V определяются тем же условием $F^*F = FF^*$. Если продолжить евклидову структуру на V до эрмитовой структуры на комплексифицированном пространстве $V_\mathbb{C}$ требованием, чтобы какой-нибудь (а значит, и любой) ортонормальный базис пространства V остался ортонормальным в $V_\mathbb{C}$, то нормальность, (анти) самосопряжённость и изометричность операторов по отношению к евклидовой структуре на V перейдут при комплексификации в те же самые свойства по отношению к эрмитовой структуре, поскольку матрица комплексифицированного оператора $F_\mathbb{C}$ в вещественном ортонормальном базисе пространства $V_\mathbb{C}$ останется той же, что у F. Применяя к таким операторам теорему n° 1.7.3 и группируя (когда понадобится) их невещественные собственные векторы и собственные значения в пары комплексно сопряжённых, получаем:

2.6.1. СЛЕДСТВИЕ. *Самосопряжённый оператор в евклидовом пространстве обладает ортонормированным базисом из собственных векторов.* □

2.6.2. СЛЕДСТВИЕ. *Антисамосопряжённый оператор в евклидовом пространстве в подходящем ортонормированном базисе имеет блочно диагональную матрицу вида*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}\,, \quad \text{где} \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_\nu \\ -a_\nu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a_\nu \in \mathbb{R}$$

□

Упражнение 2.5. Получите из следствия n° 1.7.5 нормальный вид евклидова ортогонального оператора, описанный в n° 2.3.3.

Упражнение 2.6. К какому виду приводится в подходящем ортонормальном базисе евклидова пространства произвольный нормальный оператор?

2.7. Комплексные структуры. Если $2n$-мерное векторное пространство $V = W_\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$ получилось в результате овеществления n-мерного комплексного векторного пространства W, то на пространстве V имеется вещественно линейный оператор умножения на i:

$$I : V \xrightarrow{v \mapsto iv} V\,,$$

который удовлетворят условию $I^2 = -\mathrm{Id}_V$. Наоборот, если на произвольном вещественном векторном пространстве V задать вещественно линейный оператор I с $I^2 = -\mathrm{Id}_V$, то такой оператор позволяет определить операцию умножения векторов из V на комплексные числа по правилу

$$(x+iy)\cdot v \stackrel{\text{def}}{=} x\cdot v + y\cdot I(v)\,. \tag{2-9}$$

[1] где под интегралом от комплекснозначной функции $f(t) = u(t) + iv(t)$, по определению, понимается коиплексное число $\int u\,dt + i\int v\,dt$

Поэтому всякий такой оператор I на вещественном векторном пространстве V называется *комплексной структурой* на V.

Упражнение 2.7. Проверьте непосредственным вычислением, что определённое формулой (2-9) умножение на комплексные числа наделяет V структурой векторного пространства над полем $\mathbb{C}$ (отсюда вытекает, в частности, что $\dim V$ автоматически чётна).

Увидеть это без вычислений можно следующим геометрическим способом. Поскольку оператор I аннулируется многочленом $t^2+1=(t+i)(t-i)$, его собственные значения равны $\pm i$, и комплексифицированное пространство $V_{\mathbb{C}}$ распадается в прямую сумму двух собственных подпространств комплексифицированного оператора $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$:

$$V_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_- \,, \quad \text{где}$$
$$W_+ = \ker(I_{\mathbb{C}} - i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}) = \mathrm{im}\,(I_{\mathbb{C}} + i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}})\,, \quad W_- = \ker(I_{\mathbb{C}} + i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}) = \mathrm{im}\,(I_{\mathbb{C}} - i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}})\,.$$

Как мы видели в n° 2.3.1, для каждого собственного вектора w оператора $I_{\mathbb{C}}$ сопряжённый вектор $\overline{w}$ также будет собственным для $I_{\mathbb{C}}$, причём с сопряжённым собственным значением. Это означает, что оператор комплексного сопряжения является обратным к самому себе (антилинейным) изоморфизмом между комплексными собственными подпространствами $W_\pm$

$$W_+ \xleftrightarrow[\sim]{w\leftrightarrow\overline{w}} W_-\,.$$

В частности, $V_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus \overline{W}_+$ и $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W_+$ чётна.

Заметим теперь, что для любого комплексного прямого разложения $V_{\mathbb{C}}$ в сумму двух комплексно сопряжённых комплексных подпространств[1]

$$V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U} \tag{2-10}$$

взятие вещественной части

$$\mathrm{Re}\ :\ U \xrightarrow{w\mapsto \mathrm{Re}\,w=(w+\overline{w})/2} V\,. \tag{2-11}$$

является вещественно линейным изоморфизмом, т. к. с точки зрения разложения (2-10) вещественные векторы $V=\{w\in V_{\mathbb{C}}\mid \overline{w}=w\}$ — это в точности все векторы вида $u+\overline{u}$. Перенося имеющееся в U умножение на i на пространство V посредством изоморфизма (2-11), мы получаем на V оператор $I=I_U$, который переводит вектор $v=\mathrm{Re}\,(u)\in V$ с $u\in U$ в вектор $\mathrm{Re}\,(iu)\in V$. По построению, $I^2=-1$, подпространство U является $(+i)$-собственным для I, и умножение векторов из V на комплексные числа по правилу (2-9) задаёт на V структуру комплексного векторного пространства, $\mathbb{C}$-линейно изоморфного комплексному пространству U. Мы получаем

2.7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Следующие данные на $2n$-мерном вещественном векторном пространстве V взаимно однозначно соответствуют друг другу:*

(1) *структура векторного пространства над полем $\mathbb{C}$, для которой V является овеществлением;*

(2) *вещественно линейный оператор $V \xrightarrow{I} V$ с $I^2=-E$;*

(3) *комплексное n-мерное подпространство $U\subset V_{\mathbb{C}}$, такое что $U\cap\overline{U}=0$ (или, что равносильно, $V=U\oplus\overline{U}$).*

Соответствие (1) $\Rightarrow$ (2) сопоставляет комплексной структуре оператор умножения на i. Соответствие (2) $\Rightarrow$ (3) сопоставляет I собственное $(+i)$-подпространство U комплексифицированного оператора $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$. Соответствие (3) $\Rightarrow$ (1) наделяет V комплексной структурой, индуцированной с комплексной структуры на пространстве U посредством вещественно линейного изоморфизма $\mathrm{Re}\ : U \xrightarrow{\sim} V$, переводящего $w\in U$ в $\mathrm{Re}\,(w)=(w+\overline{w})/2\in V$. При этом изоморфизм (2-11) отождествляет оператор умножения на i в U с оператором I на V из данных (2). $\square$

Упражнение 2.8. Убедитесь, что вещественно линейный оператор $F\in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ является одновременно комплексно линейным оператором на V_I тогда и только тогда, когда $FI=IF$.

[1] наличие такого разложения равносильно условиям $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} U$ и $U\cap\overline{U}=0$