§2. Группы преобразований.

2.1. Группы преобразований. Зафиксируем некоторое множество X. Набор автоморфизмов $G \subset \mathrm{Aut}\,(X)$ множества X называется *группой преобразований* (или просто *группой*), если обратные отображения ко всем преобразованиям из G, а также композиции любых двух преобразований из G тоже лежат в G. Отметим, что при выполнении этих условий G автоматически будет содержать тождественное преобразование $\mathrm{Id}_X = g{\circ}g^{-1}$ (где g — произвольное преобразование из G). Число преобразований, из которых состоит группа G (при условии, что она конечна), называется *порядком группы* и обозначается $|G|$.

2.1.1. Пример: симметрическая группа. Множество $G = \mathrm{Aut}\,(X)$ всех биективных отображений из какого-либо множества X в себя очевидно является группой. Она называется (полной) *симметрической группой* множества X. Симметрическая группа множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ обозначается $\mathfrak{S}_n$ и называется *группой перестановок n элементов*. Согласно n° 1.3.3 она имеет порядок $|\mathfrak{S}_n| = n!$. Мы будем записывать перестановку

$$\{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sigma} \{1, 2, \dots, n\}$$

строчкой $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ её значений $\sigma_i = \sigma(i)$, как мы это уже делали в примерах (n° 1.3.1) и (n° 1.6.1). В этих обозначениях перестановки $\sigma = (3, 4, 2, 1)$ и $\tau = (2, 3, 4, 1)$ действуют по правилам

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & , & \tau: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 4 & 2 & 1 & & & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

а их композиции записываются как: $\sigma\tau = (4, 2, 1, 3)$ и $\tau\sigma = (4, 1, 3, 2)$.

Упражнение 2.1. Составьте таблицу умножения шести элементов группы $\mathfrak{S}_3$, аналогичную таблице из примера (n° 1.6.1).

2.1.2. Пример: группа поворотов $\boldsymbol{\mu}_n$. Зафиксируем на плоскости точку O, а также натуральное число $n > 1$; тогда n поворотов плоскости вокруг точки O на углы $2\pi k/n$ с $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ составляют группу: обратным к повороту на угол $2\pi k/n$ будет поворот на угол $2\pi(n-k)/n$ (равный повороту на угол $-2\pi k/n$), а композиция поворотов на углы $2\pi k/n$ и $2\pi m/n$ будет поворотом на угол $2\pi\ell/n$, где ℓ равно остатку от деления $(k+m)$ на n. Тождественное преобразование отвечает повороту на нулевой угол.

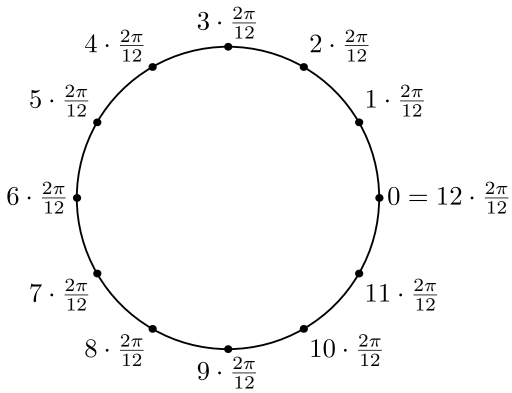

Рис. 2◇1. «Циферблат» $\boldsymbol{\mu}_{12}$.

Группа n поворотов на углы, кратные $2\pi/n$, обозначается $\boldsymbol{\mu}_n$. Её элементы удобно представлять себе в виде циферблата, деления которого изображают углы поворотов, исчисляемые в долях от полного оборота. Например, группа $\boldsymbol{\mu}_{12}$ выглядит почти как стандартный 12-часовой циферблат[1] (см. рис. 2◇1). При таком изображении композиции поворотов отвечает последовательное откладывание углов друг за другом, а переходу к обратному повороту — откладывание угла в противоположном направлении. Отметим, что операция композиции в группе $\boldsymbol{\mu}_n$ обладает свойством *коммутативности*:

$$\forall\, \tau_1, \tau_2 \in \boldsymbol{\mu}_n \quad \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1 .$$

Группы, в которых композиция коммутативна, называются *коммутативными* или *абелевыми*. Отметим также, что элементы группы $\boldsymbol{\mu}_n$ можно отождествить с классами чисел, дающих одинаковый остаток от деления на n: один и тот же поворот плоскости можно задавать разными углами, отличающимися на целое число оборотов, и поворот на $2\pi k/n$ — это то же самое, что поворот на $2\pi k'/n$ с любым $k' = k + z\cdot n$, таким что $z \in \mathbb{Z}$.

[1] но с изменённой ориентацией, поскольку увеличению угла отвечает движение против часовой стрелки, и повёрнутый набок, поскольку нулевой угол отвечает направлению горизонтальной координатной оси

2.1.3. Группы движений и группы фигур. Множество примеров групп приходит из геометрии. Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Автоморфизмы $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{R}^3)$, которые сохраняют расстояния между точками, называются *движениями*. Движения, очевидно, образуют группу. Собственные движения[1] образуют в группе всех движений подгруппу (она называется *группой собственных движений*).

Если задаться какой-нибудь фигурой $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^3$, то можно рассмотреть движения, которые переводят $\mathfrak{F}$ в себя. Группа биективных отображений фигуры $\mathfrak{F}$ в себя, определяемых этими движениями, называется (*полной*) *группой фигуры* $\mathfrak{F}$ и обозначается $G(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{F})$. Наряду с полной группой фигуры можно рассматривать *собственную* группу фигуры, в которой допускаются только собственные движения. Далее мы рассмотрим несколько примеров собственных и несобственных групп некоторых фигур.

Упражнение 2.2. Прежде, чем двигаться дальше, мы *настоятельно* рекомендуем читателю изготовить модели пяти платоновых тел: тетраэдра, октаэдра, куба, додекаэдра и икосаэдра (см. рис. 2◇5–рис. 2◇9), поскольку все последующие утверждения о движениях этих фигур — *совершенно очевидные*[2], когда Вы держите в руках модель, — могут показаться «трудными» при попытке постичь их чисто умозрительно.

2.1.4. Пример: группы диэдров $\mathfrak{D}_n$. Группа правильного плоского n-угольника в пространстве называется n-той *группой диэдра*[3] и обозначается $\mathfrak{D}_n$. Отметим, что для плоских фигур собственная группа совпадает с полной: беря композицию любого несобственного движения из группы фигуры с зеркальным отражением относительно содержащей эту фигуру плоскости, мы получим собственное движение, которое действует на фигуру точно также, как и исходное несобственное движение.

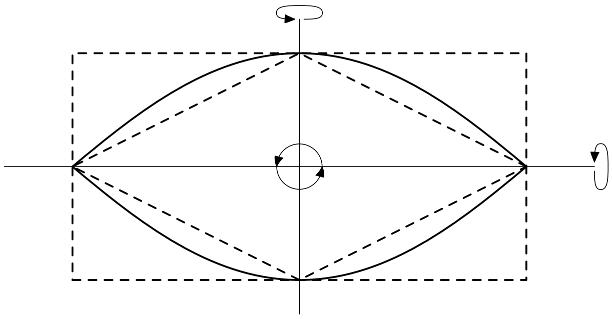

Рис. 2◇2. Группа двуугольника.

Простейшим диэдром является двуугольник[4], изображённый на рис. 2◇2 и представляющий собою симметричную луночку ○ с двумя сторонами. Самосовмещения такой луночки в пространстве исчерпываются тождественным отображением и тремя поворотами на 180° вокруг трёх попарно перпедикулярных друг другу осей, проходящих, соответственно, через вершины, через середины сторон и через центр диедра перпендикулярно плоскости, в которой он лежит.

В самом деле, нетождественное преобразование диэдра должно либо менять местами его стороны, либо менять местами его стороны, либо делать и то и то, а ровно это и происходит при трёх перечисленных нами поворотах. Очевидно, что группа диэдра фигуры состоит из тех же движений, что и группа описанного вокруг диэдра прямоугольника или вписанного в него ромба (см. рис. 2◇2) при условии, что эти четырёхугольники не являются квадратами.

Упражнение 2.3. Составьте таблицу умножения четырёх элементов группы $\mathfrak{D}_2$ и убедитесь, что эта группа коммутативна.

Следующей диэдральной группой является группа правильного треугольника $\mathfrak{D}_3$. Покажем, что она состоит из 6 движений (см. рис. 2◇3): тождественного преобразования Id, двух поворотов τ, τ^{-1} на $\pm 120°$ вокруг центра треугольника и трёх осевых симметрий $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{-1}$ относительно его медиан. Для этого занумеруем вершины треугольника числами 1, 2, 3, как на рис. 2◇3, и сопоставим каждому движению из группы треугольника перестановку вершин треугольника, которую оно осуществляет. Мы получаем отображение группы диэдра в симметрическую группу: $\mathfrak{D}_3 \hookrightarrow \mathfrak{S}_3 = \mathrm{Aut}\,(\{1,\,2,\,3\})$. Оно инъективно в силу следующего факта из школьного курса планиметрии:

[1]напомним, что движение называется *собственным*, если оно сохраняет *ориентацию* (говоря наивно, переводит левосторонний винт в левосторонний); например, повороты — это собственные движения, а отражения относительно плоскости и центральная симметрия пространства — нет; если воспользоваться теоремой о том, что любое движение является композицией отражений, то собственные движения — это те, которые можно представить в виде композиции чётного числа отражений

[2]в буквальном смысле этого слова

[3]т. е. «двугранника»; имеется в виду, что пространственный многоугольник имеет две визуально неотличимые друг от друга грани — две поверхности плёнки, которую на него можно натянуть

[4]диэдральная группа $\mathfrak{D}_2$ иногда ещё называется *четвертной группой Клейна* и обозначается $\mathfrak{V}_4$

Упражнение 2.4. Докажите, что два движения плоскости совпадают тогда и только тогда, когда они одинаково действуют на вершины какого-нибудь треугольника.

Поскольку группа $\mathfrak{S}_3$ тоже состоит из шести перестановок, наше отображение биективно. Отметим, оно переводит повороты на $\pm 120^\circ$ в циклические перестановки $(2,\,3,\,1)$ и $(3,\,1,\,2)$, а осевые симметрии — во всевозможные транспозиции пар букв: $(1,\,3,\,2)$, $(3,\,2,\,1)$ и $(2,\,1,\,3)$.

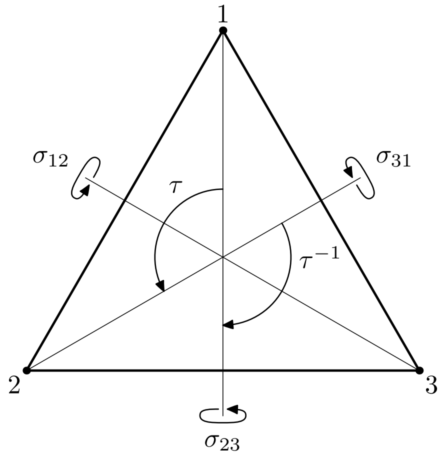

Рис. 2◇3. Группа треугольника.

Упражнение 2.5. Обозначим через $\sigma_{ij} \in \mathfrak{S}_3$ перестановку букв i и j. Убедитесь, что преобразования из группы $\mathfrak{S}_3$ можно записать в виде: Id, σ_{12}, σ_{23}, σ_{13}, $\sigma_{12}\sigma_{23}$, $\sigma_{23}\sigma_{12}$. Где в этом списке повороты $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и $3 \to 2 \to 1 \to 3$?

Покажем, что для произвольного $n \geqslant 2$ группа диэдра $\mathfrak{D}_n$ состоит из $2n$ движений: n поворотов вокруг центра многоугольника на углы $2\pi k/n$ с $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$ (при $k = 0$ получается тождественное преобразование) и n осевых симметрий (т.е. поворотов на 180° в пространстве) относительно прямых, проходящих при нечётном n через вершину и середину противоположной стороны, а при чётном n — через пары противоположных вершин и через середины противоположных сторон (см. рис. 2◇4).

Для этого занумеруем вершины диэдра числами $1, 2, \ldots, n$ и разобьём все движения из группы диэдра на n непересекающихся классов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, отнеся в класс C_i все движения, которые переводят вершину 1 в вершину i. Убедимся теперь, что в каждом классе C_i имеется ровно столько же движений, сколько и в классе C_1. Для этого зафиксируем какое нибудь движение $g \in C_i$ и рассмотрим отображения умножения слева на g и на g^{-1}:

$$\gamma : C_1 \xrightarrow{h \mapsto g \circ h} C_i \quad \text{и} \quad \gamma' : C_i \xrightarrow{f \mapsto g^{-1} \circ f} C_1 \,. \tag{2-1}$$

Легко видеть, что они обратны друг другу:

$$\forall\, f \in C_i \;\; \gamma(\gamma'(f)) = \gamma(g^{-1}f) = gg^{-1}f = f \quad \text{и} \quad \forall\, h \in C_1 \;\; \gamma'(\gamma(h)) = \gamma'(gh) = g^{-1}gh = h\,,$$

а значит, в силу предложения (n° 1.7.1) они биективны. Таким образом, $|\mathfrak{D}_n| = n \cdot |C_1|$. Заметим теперь, что согласно упр. 2.4 имеется ровно два движения, переводящих многоугольник в себя и оставляющих на месте вершину 1: тождественное (тождественно действующее на треугольник, образованный вершиной 1 и смежными с ней вершинами 2 и n) и симметрия относительно оси, проходящей через вершину 1 и центр многоугольника (переставляющая вершины 2 и n между собой). Итак, $|C_1| = 2$ и $|\mathfrak{D}_n| = 2n$.

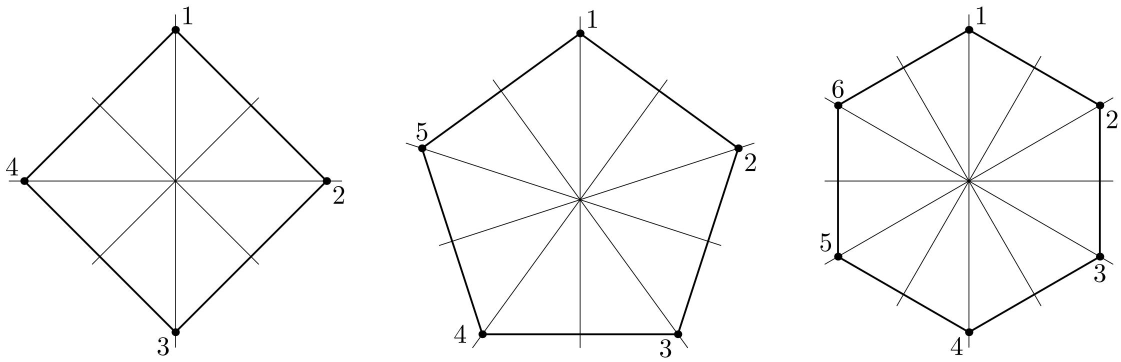

Рис. 2◇4. Оси диэдров для $n = 4, 5, 6$.

Упражнение 2.6. Составьте таблицы умножения для групп $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$ и $\mathfrak{D}_5$.

2.1.5. Пример: полная и собственная группы правильного тетраэдра. Собственная группа тетраэдра помимо тождественного преобразования содержит $4 \cdot 2 = 8$ поворотов на углы $\pm 120^\circ$ вокруг прямых, проходящих через вершину и центр противоположной грани, а также 3 поворота на 180° вокруг прямых, проходящих через середины противоположных рёбер (см. рис. 2◇5). Отметим, что этих движений достаточно, чтобы перевести любую вершину тетраэдра в любую другую. В несобственной группе, помимо перечисленных поворотов, имеется 6 отражений в плоскостях, проходящих через ребро и середину противоположного к нему ребра. Какие ещё движения есть в группе тетраэдра?

Для ответа на этот вопрос подсчитаем, сколько всего движений имеется в собственной и несобственной группах тетраэдра. Занумеруем вершины числами $1, 2, 3, 4$ и разобьем все движения из (как собственной, так и несобственной) группы тетраэдра на 4 непересекающихся класса C_1, C_2, C_3, C_4, отнеся в класс C_i те движения, которые переводят вершину 1 в вершину i. Как и в предыдущем примере, в каждом классе C_i будет столько же элементов, сколько в классе C_1 : это следует из наличия обратных другу отображений, задаваемых взятием композиции всех преобразований из класса C_1 с каким-нибудь фиксированным преобразованием g, переводящим вершину 1 в вершину i, а всех преобразований из класса C_i — с преобразованием g^{-1} (ср. с (2-1)) :

$$\gamma : C_1 \xrightarrow{h \mapsto g \circ h} C_i \quad \text{и} \quad \gamma' : C_i \xrightarrow{f \mapsto g^{-1} \circ f} C_1 \,. \tag{2-2}$$

Все движения, оставляющие вершину 1 на месте, образуют группу, которую можно отождествить с группой правильного треугольника 234: она состоит из трёх собственных движений — тождественного отображения и двух поворотов на $\pm 120^\circ$ вокруг оси, соединяющей вершину 1 с центром треугольника 234, а также трёх несобственных движений — отражений в плоскостях[1], проходящих через вершину 1 и медианы треугольника 234. Таким образом, собственная группа тетраэдра состоит из $3 \cdot 4 = 12$ движений, и стало быть, исчерпывается двенадцатью описанными выше поворотами. Полная же группа тетраэдра состоит из $4 \cdot 6 = 24$ движений, а значит, кроме шести описанных выше отражений содержит ещё 6 несобственных движений. Чтобы их описать, сопоставим каждому движению осуществляемую им перестановку вершин, как в n° 2.1.4. Мы получим вложение полной группы тетраэдра в симметрическую группу $\mathfrak{S}_4$ — это вытекает из трёхмерной версии упр. 2.4:

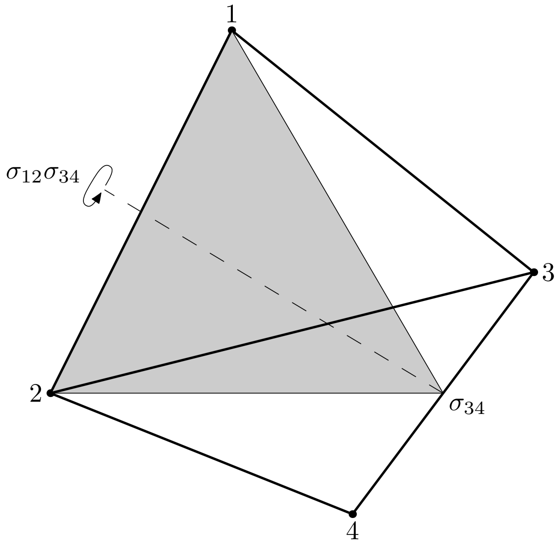

Рис. 2◇5. Плоскость симметрии σ_{34} и ось поворота на 180° (равного композиции $\sigma_{12}\sigma_{34}$).

Упражнение 2.7. Докажите, что для совпадения двух движений пространства необходимо и достаточно, чтобы они одинаково действовали на вершины какого-нибудь тетраэдра.

Поскольку $|\mathfrak{S}_4| = 24$, наше вложение является биекцией: если обозначить через σ_{ij} отражение тетраэдра в плоскости, проходящей через середину ребра $[i, j]$ и противоположное ребро, то шести отражениям σ_{ij} будут отвечать транспозиции букв i и j. Поворотам на $\pm 120^\circ$ (которые представляют собою композиции $\sigma_{ij}\sigma_{jk}$ с попарно различными индексами i, j, k), отвечают циклические перестановки трёх букв i, j, k, трём вращениям на $\pm 180^\circ$ относительно осей, соединяющих середины противоположных рёбер, отвечают одновременные транспозиции непересекающихся пар букв:

$$\begin{array}{lcl}
\sigma_{12}\,\sigma_{34} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 2\,1\,4\,3 \\
\sigma_{13}\,\sigma_{24} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 3\,4\,1\,2 \\
\sigma_{14}\,\sigma_{23} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 4\,3\,2\,1\,,
\end{array}$$

Таким образом «недостающие» шесть несобственных преобразований отвечают шести возможным циклическим перестановкам вершин:

$$\begin{array}{ccc}
1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 & 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 2 & 3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 3 \\
2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 2 & 1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1 & 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 3
\end{array}$$

которые можно реализовать поворотами на $\pm 90^\circ$ относительно прямых, проходящих через середины противоположных рёбер с последующим отражением в плоскости, проходящей через центр тетраэдра и перпендикулярной оси поворота:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{34} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 4\,1\,2\,3 & \sigma_{34}\sigma_{23}\sigma_{12} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 2\,3\,4\,1 \\
\sigma_{13}\sigma_{23}\sigma_{24} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 4\,3\,1\,2 & \sigma_{24}\sigma_{23}\sigma_{13} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 3\,4\,2\,3 \\
\sigma_{14}\sigma_{24}\sigma_{23} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 3\,4\,2\,1 & \sigma_{23}\sigma_{24}\sigma_{14} & : & 1\,2\,3\,4 \longmapsto 4\,3\,1\,2\,.
\end{array}$$

(обратите внимание, что перестановки из правой колонки обратны перестановкам из левой).

2.1.6. Пример: полная и собственная группы додекаэдра. Собственная группа додекаэдра (см. рис. 2◇6) состоит из $6 \cdot 4 = 24$ поворотов на углы $2\pi k/5$ (где $k = 1, 2, 3, 4$) вокруг осей, проходящих через центры

[1] в примере (n° 2.1.4) им соответствовали осевые симметрии треугольника

противоположных граней додекаэдра, $10 \cdot 2 = 20$ поворотов на углы $\pm 2\pi/3$ вокруг осей, проходящих через противоположные вершины, 15 поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер додекаэдра, и тождественного преобразования.

В полной группе додекаэдра помимо этих 60 движений содержатся их композиции с центральной симметрией относительно центра додекаэдра. Убедиться в том, что никаких других преобразований в группе додекаэдра нет, можно вычислив порядок этой группы тем же методом, что и в предыдущих двух примерах. Для разнообразия мы на этот раз занумеруем не вершины, а грани додекаэдра числами от 1 до 12 и разобьём группу додекаэдра на 12 непересекающихся классов C_i, отнеся в класс C_i все преобразования, переводящие первую грань в i-тую.

Упражнение 2.8. Установите биекцию между классами C_i и C_1.

Класс C_1, переводящий в себя первую грань, можно отождествить с диэдральной группой $\mathfrak{D}_5$. При этом пяти поворотам пятиугольника будут отвечать повороты додекаэдра, вокруг оси, проходящей через центр первой и противоположной к ней грани, а симметриям пятиугольника — несобственные движения, которые можно реализовать отражениями додекаэдра в пяти плоскостях, перпендикулярных первой грани и проходящих через вершину первой грани и середину противоположного ей ребра первой грани. Итого, в собственной группе додекаэдра имеется $12 \cdot 5 = 60$ движений, а в несобственной $12 \cdot 10 = 60$ движений.

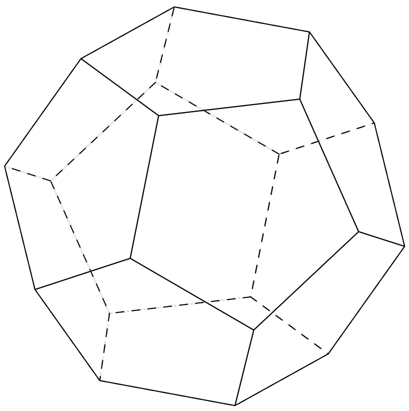

Рис. 2◇6. Додекаэдр.

Упражнение 2.9. Ещё раз подсчитайте число движений в группах тетраэдра и додекаэдра, рассмотрев действие этих групп на рёбра.

Упражнение 2.10. Покажите что полные группы куба (см. рис. 2◇7) и октаэдра (см. рис. 2◇8) состоят из 48 движений, а собственные — из 24.

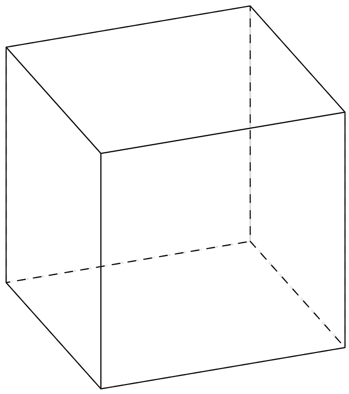

Рис. 2◇7. Куб.

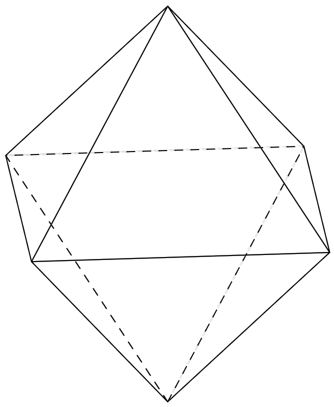

Рис. 2◇8. Октаэдр.

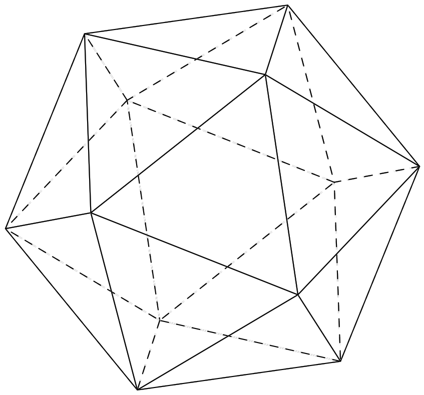

Рис. 2◇9. Икосаэдр.

Упражнение 2.11. Покажите что полная группа икосаэдра (см. рис. 2◇9) состоит из 120 движений, а собственная — из 60.

2.2. Смежные классы. Рассуждение, использованное нами выше для подсчёта количества преобразований в группах фигур путём разбиения этих групп на классы, носит очень общий характер и допускает следующее алгебраическое описание. Пусть в группе G имеется подгруппа[1] $H \subset G$. Для каждого $g \in G$ назовём *левым смежным классом* подгруппы H, отвечающим элементу g, множество преобразований

$$gH \stackrel{\text{def}}{=} \{gh \mid h \in H\} , \tag{2-3}$$

получающихся применением g ко всевозможным преобразованиям $h \in H$. Ясно, что в каждом таком множестве элементов столько же, сколько в подгруппе H, поскольку отображения

$$H \underset{f \mapsto g^{-1} \circ f}{\overset{h \mapsto g \circ h}{\rightleftarrows}} gH .$$

[1] т. е. подмножество, также образующее группу; в предыдущих примерах это была подгруппа C_1, состоявшая из преобразований, переводящих в себя вершину или грань, помеченную нами числом 1

задают (как и в формулах (2-1), (2-2)) взаимно обратные биекции между gH и H. С другой стороны, любые два смежных класса g_1H и g_2H либо не пересекаются, либо совпадают. В самом деле, из равенства $g_1h_1 = g_2h_2$ вытекает что $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$, а значит, $g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H \subset g_2H$. По тем же причинам $g_2 = g_1h_1h_2^{-1}$ и $g_2H = g_1h_1h_2^{-1}H \subset g_1H$.

Упражнение 2.12. Убедитесь, что отношение принадлежности двух элементов g_1, g_2 к одному смежному классу эквивалентно каждому из условий: а) $g_2^{-1}g_1 \in H$ б) $g_1^{-1}g_2 \in H$ и является *отношением эквивалентности* на группе G в смысле n° 1.5 (это даёт другое доказательство того, что любые два смежных классы либо не пересекаются, либо совпадают).

Итак, если в группе G задана произвольная подгруппа H, то группа G распадается в дизъюнктное объединение различных левых смежных классов (2-3), каждый из которых состоит из того же числа элементов, что и подгруппа H. Множество левых смежных классов подгруппы H в группе G обычно обозначается G/H, а число различных смежных классов обозначается $[G : H] = |G/H|$ и называется *индексом* подгруппы H. Мы получаем следующий результат, известный как *теорема Лагранжа о смежных классах*:

2.2.1. ТЕОРЕМА (J. L. LAGRANGE). *Число элементов в любой подгруппе H произвольной конечной группы G делит нацело число элементов в группе G, и частное от этого деления равно количеству различных смежных классов G по H, т. е. $[G : H] = |G| : |H|$.* □

2.2.2. Пример: смежные классы в группе поворотов. Рассмотрим в группе двенадцати поворотов $G = \boldsymbol{\mu}_{12}$ из примера (n° 2.1.2) подгруппу $H \subset G$, образованную четырьмя поворотами на углы, кратные $\pi/2$. Если обозначить поворот на угол $2\pi k/12$ через τ_k (см. рис. 2◇10), то подгруппа H будет состоять из из поворотов τ_0, τ_3, τ_6 и τ_9. Вся группа G распадётся при этом в объединение трёх смежных классов

$$
\begin{aligned}
H = \tau_0H = \tau_3H = \tau_6H = \tau_9H &= \{\tau_0,\, \tau_3,\, \tau_6,\, \tau_9\} \\
\tau_1H = \tau_4H = \tau_7H = \tau_{10}H &= \{\tau_1,\, \tau_4,\, \tau_7,\, \tau_{10}\} \\
\tau_2H = \tau_5H = \tau_8H = \tau_{11}H &= \{\tau_2,\, \tau_5,\, \tau_8,\, \tau_{11}\}\,,
\end{aligned}
$$

представители которых обозначены на рис. 2◇10 соответственно точкой, засечкой и двумя засечками. Обратите внимание, что один и тот же смежный класс может быть по разному записан в виде gH — в качестве g в этой записи можно взять любой элемент $g' \in gH$. В геометрических терминах подгруппа H состоит из всех поворотов, которые переводят в себя один из трёх квадратов с вершинами в делениях изображённого на рис. 2◇10 циферблата (а именно сплошного квадрата), а остальные смежные классы состоят из поворотов, переводящих этот квадрат в два других квадрата.

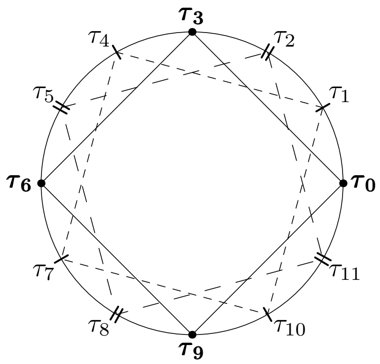

Рис. 2◇10. Смежные классы подгруппы поворотов на углы $\pi k/2$ в группе $\boldsymbol{\mu}_{12}$.

Упражнение 2.13. В собственной группе G каждого из пяти платоновых тел опишите смежные классы подгруппы $H \subset G$, состоящей из всех поворотов вокруг оси, проходящей через центр тела и
а) вершину 1; б) центр грани 1; в) середину ребра 1.

2.2.3. Правые смежные классы. Отметим, что вместо левых смежных классов (2-3) мы могли бы с тем же успехом использовать *правые смежные классы*

$$Hg \stackrel{\text{def}}{=} \{hg \mid h \in H\}\,. \tag{2-4}$$

Упражнение 2.14. Повторите для правых смежных классов все предыдущие рассуждения, т. е. покажите, что все они состоят из одинакового числа элементов (равного порядку подгруппы H) и любые два смежных класса или не пересекаются или совпадают; кроме того, сформулируйте и решите «правостороннюю» версию упр. 2.12.

Множество правых смежных классов подгруппы H в группе G обычно обозначается $H\backslash G$. В качестве следствия из теоремы Лагранжа мы получаем, что число левых смежных классов (2-3) равно числу правых смежных классов (2-4):

$$|H\backslash G| = [G : H] = |G|/|H| = |G/H|\,.$$