

НОП1◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-3x_1^2 - 4x_2x_1 + 8x_3x_1 - 2x_4x_1 - x_2^2 + 2x_3x_2 + 4x_3^2 - 4x_4x_3 + 2x_4^2.$$

НОП1◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{7+i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{5+3i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{-7-3i}{4} & \frac{9+i}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{9+i}{4} & \frac{-7-3i}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{5+3i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{7+i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 3-i & 3+i & 1 \\ 4i & 1-3i & -2+5i & 4-i \\ i & 3i & 1+6i & 3-5i \\ -3i & i & -i & 1-i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП1◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{19}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{11}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{19}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{11}{10} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП1◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} i & 2i & 6 \\ -1 & 0 & i \\ 0 & -i & -2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & -2 & 2i \\ 2i & -2 & 5i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix}$$

НОП2◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 6x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 8x_2^2 - 12x_3x_2 - 10x_4x_2 + 4x_3^2 + 8x_4x_3 + 4x_4^2.$$

НОП2◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -5-i & 1-i & -2+i \\ 0 & 1+i & 0 & -1 \\ i & i & 1 & 3 \\ -i & 0 & 2i & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-30+9i}{13} & \frac{-9+4i}{13} & \frac{9-4i}{13} & \frac{2+2i}{13} \\ \frac{-9+4i}{13} & \frac{-17-4i}{13} & \frac{4-9i}{13} & \frac{-2-2i}{13} \\ \frac{9-4i}{13} & \frac{4-9i}{13} & \frac{-17-4i}{13} & \frac{2+2i}{13} \\ \frac{2+2i}{13} & \frac{-2-2i}{13} & \frac{2+2i}{13} & \frac{-1+12i}{13} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП2◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -\frac{4}{3} & -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

НОП2◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2i \\ -5i & 3i & -2 \\ -2 & 2 & i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2i & 6 \\ 1 & -i & -4 \\ 4i & 6 & -21i \end{pmatrix}$$

НОПЗ◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_2^2 - 4x_3x_2 + 4x_4x_2 - x_3^2 + 2x_4x_3 - x_4^2.$$

НОПЗ◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -3 & -4-i & -4-i \\ i & 1+i & 3 & -1 \\ -i & i & 1+3i & 4+2i \\ 3i & 2i & -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{31-7i}{10} & \frac{-9+3i}{5} & \frac{1+i}{5} & \frac{-1-i}{10} \\ \frac{-9+3i}{5} & \frac{2+i}{5} & \frac{2+2i}{5} & \frac{-1-i}{5} \\ \frac{1+i}{5} & \frac{2+2i}{5} & \frac{2+i}{5} & \frac{9-3i}{5} \\ \frac{-1-i}{10} & \frac{-1-i}{5} & \frac{9-3i}{5} & \frac{31-7i}{10} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОПЗ◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{20}{9} & \frac{22}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{20}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{22}{9} & \frac{2}{9} & \frac{13}{9} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

НОПЗ◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 3i & -1 & -3 \\ -3 & -2i & -5i \\ i & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 & -i \\ -1 & -3i & -6 \\ 1 & 2i & 3 \end{pmatrix}$$

НОП4◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 6x_2x_1 - 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 8x_2^2 + 8x_3x_2 - 8x_4x_2 + x_3^2 - 6x_4x_3 + 10x_4^2.$$

НОП4◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{25-9i}{10} & \frac{1+i}{10} & \frac{-1-i}{5} & \frac{5-i}{5} \\ \frac{1+i}{10} & \frac{-23-9i}{10} & \frac{-7-i}{5} & \frac{-1-i}{5} \\ \frac{-1-i}{5} & \frac{-7-i}{5} & \frac{-1-3i}{5} & \frac{2+2i}{5} \\ \frac{5-i}{5} & \frac{-1-i}{5} & \frac{2+2i}{5} & \frac{5-3i}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -3+i & 1 & 2-i \\ -3i & 1-2i & -1 & 1+3i \\ 4i & 7i & 1+i & 1-5i \\ -2i & -4i & i & 1+2i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП4◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{8}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{32}{13} & \frac{14}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{17}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{32}{13} & \frac{2}{13} & \frac{22}{13} & -\frac{10}{13} \\ \frac{14}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{10}{13} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

НОП4◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -9 & 2 & -2 \\ 2i & -5i & 2i \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2i & -6 \\ 2 & 5i & 14 \\ 6 & 14i & 41 \end{pmatrix}$$

НОП5◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 - x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_4x_3 + 3x_4^2.$$

НОП5◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{3-7i}{12} & \frac{1+i}{4} & \frac{-9-5i}{12} & \frac{3+5i}{12} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{7+3i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{1+i}{4} \\ \frac{-9-5i}{12} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-3-7i}{12} & \frac{-9-5i}{12} \\ \frac{3+5i}{12} & \frac{1+i}{4} & \frac{-9-5i}{12} & \frac{3-7i}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 3 & -1+i & 5 \\ -2i & 1+i & -4-2i & 4+i \\ -4i & 4i & 1-3i & -4+4i \\ -3i & -i & -2i & 1 \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП5◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{12}{11} & \frac{13}{11} & -\frac{32}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{13}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{13}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{32}{11} & -\frac{13}{11} & -\frac{12}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{8}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{16}{11} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{19}{10} & -\frac{17}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{19}{10} & -\frac{11}{5} & \frac{7}{5} & \frac{7}{10} \\ -\frac{17}{10} & \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП5◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3i & 5i & -2i \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 4 \\ -1 & -2i & -6 \\ -4 & -6i & -21 \end{pmatrix}$$

НОП6◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$2x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 13x_2^2 - 2x_3x_2 + 26x_4x_2 + x_3^2 - 4x_4x_3 + 14x_4^2.$$

НОП6◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-9-4i}{7} & \frac{-3+3i}{7} & \frac{1+i}{7} & \frac{-7-4i}{7} \\ \frac{-3+3i}{7} & \frac{-3+2i}{7} & \frac{-1+5i}{7} & \frac{4-2i}{7} \\ \frac{1+i}{7} & \frac{-1+5i}{7} & \frac{-1-4i}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{-7-4i}{7} & \frac{4-2i}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1-i}{7} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 2+i & -3-i & i \\ 3i & 1+4i & -3i & 1+4i \\ 0 & -3i & 1+i & -2i \\ 2i & 4i & -6i & 1+i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП6◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{17}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{17}{12} & -\frac{13}{12} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{12} & -\frac{13}{12} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & \frac{1}{10} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

НОП6◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 9 \\ -2 & -1 & 0 \\ -i & -i & -2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -2i & -5 & -9i \\ 4i & 9 & 18i \\ 1 & -2i & 4 \end{pmatrix}$$

НОП7◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-2x_2x_1 + 2x_3x_1 - 2x_4x_1 - x_2^2 + 2x_3x_2 + 2x_4x_2 - x_3^2 - 2x_4x_3 + 4x_4^2.$$

НОП7◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & 4 & 0 & 2-i \\ -2i & 1+i & 1+i & -4+i \\ -4i & 4i & 1+5i & -4-i \\ -3i & i & -i & 1+5i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-21+7i}{12} & \frac{-7+i}{12} & \frac{1+i}{12} & \frac{1+9i}{12} \\ \frac{-7+i}{12} & \frac{-5+11i}{12} & \frac{1+i}{4} & \frac{-5-i}{12} \\ \frac{1+i}{12} & \frac{1+i}{4} & \frac{-13-i}{12} & \frac{-5-5i}{12} \\ \frac{1+9i}{12} & \frac{-5-i}{12} & \frac{-5-5i}{12} & \frac{-21-5i}{12} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП7◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{11}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{11}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{11}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} \\ -\frac{7}{10} & \frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{11}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{7}{10} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП7◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -5i & -2 & -2 \\ -2 & i & 2i \\ 2i & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ 2 & i & 6 \\ 0 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

НОП8◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-8x_1^2 - 6x_2x_1 + 10x_3x_1 + 10x_4x_1 - x_2^2 + 4x_3x_2 + 2x_4x_2 - 2x_3^2 - 10x_4x_3 + 3x_4^2.$$

НОП8◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-15-9i}{13} & \frac{-2+2i}{13} & \frac{28+4i}{13} & \frac{-1-4i}{13} \\ \frac{-2+2i}{13} & \frac{-15-12i}{13} & \frac{2+2i}{13} & \frac{-14-2i}{13} \\ \frac{28+4i}{13} & \frac{2+2i}{13} & \frac{-28-9i}{13} & \frac{-12-4i}{13} \\ \frac{-1-4i}{13} & \frac{-14-2i}{13} & \frac{-12-4i}{13} & \frac{-7-9i}{13} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 1+i & -4-i \\ -i & 1+2i & 3-i & 1 \\ -i & -2i & 1 & -1+4i \\ -2i & 4i & -4i & 1+i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП8◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{11}{6} \\ -1 & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & \frac{8}{3} \\ -\frac{11}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{23}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{23}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП8◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6i & 5i & -2i \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2i & -2 \\ 2 & -5i & -6 \\ 2 & -6i & -9 \end{pmatrix}$$

НОП9◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-17x_1^2 + 12x_2x_1 - 24x_3x_1 + 6x_4x_1 - 10x_2^2 + 16x_3x_2 - 6x_4x_2 - 10x_3^2 + 6x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП9◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -3 & 1 & 5+i \\ 2i & 1+i & i & -1+3i \\ -2i & -4i & 1-3i & -1-5i \\ -2i & -3i & -7i & 1-8i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-29+9i}{12} & \frac{-1+i}{4} & \frac{-5-3i}{12} & \frac{-19+3i}{12} \\ \frac{-1+i}{4} & \frac{-7+3i}{4} & \frac{-1+i}{4} & \frac{1-i}{4} \\ \frac{-5-3i}{12} & \frac{-1+i}{4} & \frac{-5+9i}{12} & \frac{5+3i}{12} \\ \frac{-19+3i}{12} & \frac{1-i}{4} & \frac{5+3i}{12} & \frac{-29+9i}{12} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП9◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{22}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{31}{13} & \frac{12}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{21}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{6}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{17}{13} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{20}{13} & -\frac{24}{13} & 2 & -\frac{8}{13} \\ -\frac{24}{13} & \frac{22}{13} & -\frac{10}{13} & -\frac{32}{13} \\ 2 & -\frac{10}{13} & -\frac{27}{13} & -\frac{22}{13} \\ -\frac{8}{13} & -\frac{32}{13} & -\frac{22}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix}.$$

НОП9◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 9i & -2 & 6 \\ 6 & 2i & -5i \\ 2i & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & -2 & -2i \\ -2 & 6i & -9 \\ -2 & 5i & -6 \end{pmatrix}$$

НОП10◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$2x_1^2 + 8x_2x_1 + 2x_4x_1 + 7x_2^2 + 4x_4x_2 + x_3^2 - 6x_4x_3 + 10x_4^2.$$

НОП10◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{-3+3i}{4} & \frac{1+i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{3+i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-3i}{4} \\ \frac{-3+3i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1+i}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{-1-3i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{3+i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & i & -3 & 5-i \\ i & 1+2i & -1+i & 1-i \\ -2i & -3i & 1 & i \\ 2i & -2i & 0 & 1-5i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП10◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{10}{7} & -1 & \frac{5}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{15}{7} & -\frac{2}{7} & -2 \\ -1 & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{11}{7} \\ \frac{5}{7} & -2 & -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

НОП10◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 5i & -2i & 6 \\ -5 & 2 & 5i \\ 2i & -i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & -2 & 2i \\ 0 & -2 & 5i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

НОП11◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-8x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 4x_4x_1 - 5x_2^2 - 10x_3x_2 + 4x_4x_2 - 4x_3^2 + 4x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП11◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{9-i}{10} & \frac{1+i}{10} & \frac{-8+7i}{10} & \frac{-12+3i}{10} \\ \frac{1+i}{10} & \frac{9-i}{10} & \frac{-12+3i}{10} & \frac{-8+7i}{10} \\ \frac{-8+7i}{10} & \frac{-12+3i}{10} & \frac{3-2i}{5} & \frac{2+2i}{5} \\ \frac{-12+3i}{10} & \frac{-8+7i}{10} & \frac{2+2i}{5} & \frac{3-2i}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -2+i & -5 & 1 \\ -3i & 1-2i & 2+i & 3+i \\ 2i & 0 & 1-i & -4-2i \\ -3i & -4i & 3i & 1 \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП11◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 2 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{13}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{13}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{19}{12} & \frac{11}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{13}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{19}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{19}{12} & -\frac{5}{4} \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

НОП11◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 2 & 9i & 2i \\ 2i & -2 & -5 \\ 1 & 2i & 2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -6 & 14i & 4i \\ -i & -2 & 6i \\ -2i & -5 & 14i \end{pmatrix}$$

НОП12◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 3x_2^2 + 8x_3x_2 + 2x_4x_2 + 2x_3^2 - 10x_4x_3 - 7x_4^2.$$

НОП12◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{2-3i}{4} & \frac{2+i}{4} & \frac{i}{4} & \frac{i}{4} \\ \frac{2+i}{4} & \frac{2-3i}{4} & \frac{i}{4} & \frac{i}{4} \\ \frac{i}{4} & \frac{i}{4} & \frac{8-3i}{4} & \frac{-4+i}{4} \\ \frac{i}{4} & \frac{i}{4} & \frac{-4+i}{4} & \frac{8-3i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -1-i & 1+i \\ -2i & 1+i & 3+2i & -4-3i \\ 3i & 4i & 1-2i & -5-2i \\ -i & i & 4i & 1-4i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП12◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \\ -\frac{1}{7} & 2 & \frac{4}{7} & \frac{9}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 1 & \frac{9}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

НОП12◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2 & i & 2i \\ 2i & 2 & 5 \\ 1 & -i & -2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ i & -2 & 6i \\ 0 & 1 & -2i \end{pmatrix}$$

НОП13◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-12x_1^2 - 2x_2x_1 + 12x_3x_1 + 4x_4x_1 - 2x_2^2 - 6x_3x_2 - 2x_4x_2 - 9x_3^2 - 6x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП13◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & i & 3-i & 4+i \\ 4i & 1+5i & -4i & 4+4i \\ -i & -4i & 1+2i & 4 \\ -3i & -i & -i & 1-6i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{2+7i}{13} & \frac{2-2i}{13} & \frac{-2-8i}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{2-2i}{13} & \frac{11+4i}{13} & \frac{12-6i}{13} & \frac{-2+10i}{13} \\ \frac{-2-8i}{13} & \frac{12-6i}{13} & \frac{5+i}{13} & \frac{-10+4i}{13} \\ \frac{-12}{13} & \frac{-2+10i}{13} & \frac{-10+4i}{13} & \frac{8+i}{13} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП13◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} & \frac{11}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{11}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{13}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{11}{9} & \frac{13}{9} & -\frac{14}{9} \end{pmatrix}.$$

НОП13◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -i \\ i & -i & 0 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2i & 1 \\ -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & 2i \end{pmatrix}$$

НОП14◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$2x_2x_1 + 3x_2^2 - 12x_3x_2 + 4x_4x_2 + 9x_3^2 - 6x_4x_3 + x_4^2.$$

НОП14◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -2+i & -1-i & 3+i \\ 3i & 1+4i & -2i & 1+2i \\ 4i & 7i & 1 & 4+2i \\ i & 4i & 5i & 1+2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-1+3i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{23-3i}{12} & \frac{-19-3i}{12} & \frac{13-9i}{12} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{-19-3i}{12} & \frac{29+9i}{12} & \frac{19+3i}{12} \\ \frac{-1-i}{4} & \frac{13-9i}{12} & \frac{19+3i}{12} & \frac{23-3i}{12} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП14◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{11}{10} & \frac{13}{10} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{13}{10} & \frac{19}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

НОП14◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -3i & 3i & -i \\ -3 & 5 & -2 \\ i & -2i & i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & -i \\ i & 2 & -3i \\ i & 3 & -6i \end{pmatrix}$$

НОП15◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$5x_1^2 + 10x_2x_1 + 6x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_3x_2 + x_3^2 - x_4^2.$$

НОП15◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{3-3i}{4} & \frac{-1+i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{1+i}{4} \\ \frac{-1+i}{4} & \frac{3-3i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{1+i}{4} \\ \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-5+i}{4} & \frac{-7+3i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{-7+3i}{4} & \frac{-5+i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1+i & 2-i & -7-i \\ 3i & 4i & 1-3i & -1-5i \\ -3i & -3i & 4i & 1+3i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП15◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 1 & \frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{14}{9} & -1 & \frac{17}{9} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{9} & \frac{17}{9} & 1 & \frac{16}{9} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{6} & -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & -\frac{11}{6} \\ -\frac{11}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

НОП15◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2i & 2i & 1 \\ 5 & -2 & 2i \\ 2i & -i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \\ -i & 0 & -i \\ -1 & 2i & -6 \end{pmatrix}$$

НОП16◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-3x_1^2 + 4x_2x_1 + 6x_3x_1 + 18x_4x_1 - x_2^2 - 4x_3x_2 - 6x_4x_2 - 12x_3^2 - 24x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП16◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & 2+i & 1+i & 1-i \\ 4i & 1+5i & 2+5i & -3-4i \\ 0 & 2i & 1+3i & 2-i \\ -3i & -4i & -5i & 1+5i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-4+i}{4} & \frac{-2-i}{4} & \frac{-2-i}{4} & \frac{4+3i}{4} \\ \frac{-2-i}{4} & \frac{-6+i}{4} & \frac{-2-3i}{4} & \frac{2+i}{4} \\ \frac{-2-i}{4} & \frac{-2-3i}{4} & \frac{-6+i}{4} & \frac{2+i}{4} \\ \frac{4+3i}{4} & \frac{2+i}{4} & \frac{2+i}{4} & \frac{-4+i}{4} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП16◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{32}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{7}{11} & -1 & \frac{16}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{16}{11} & -\frac{35}{11} \end{pmatrix}.$$

НОП16◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 5i & 2 & -2 \\ -2 & i & -2i \\ -2i & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & -2i \\ -2 & i & -6 \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$$

НОП17◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-17x_1^2 - 18x_2x_1 + 8x_3x_1 + 6x_4x_1 - 5x_2^2 + 4x_3x_2 + 4x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП17◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{16-11i}{12} & \frac{-4-i}{12} & \frac{10+i}{12} & \frac{-2+i}{4} \\ \frac{-4-i}{12} & \frac{16-11i}{12} & \frac{-10-i}{12} & \frac{2-i}{4} \\ \frac{10+i}{12} & \frac{-10-i}{12} & \frac{10-11i}{12} & \frac{-2+i}{4} \\ \frac{-2+i}{4} & \frac{2-i}{4} & \frac{-2+i}{4} & \frac{6-i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 4 & 9+i & -1+i \\ -2i & 1+i & -2-i & -3i \\ 2i & -i & 1+2i & 4+3i \\ i & -3i & -5i & 1+5i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП17◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{14}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ -\frac{14}{9} & \frac{1}{9} & \frac{19}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{19}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{17}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{28}{13} \\ -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{32}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{32}{13} & \frac{11}{13} & \frac{16}{13} \\ -\frac{28}{13} & \frac{8}{13} & \frac{16}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

НОП17◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -i & 2i & 2i \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 2 & -5i & 6 \\ 2 & -5i & 5 \\ -1 & 2i & -2 \end{pmatrix}$$

НОП18◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 + 12x_2x_1 - 8x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 - 8x_3x_2 + 4x_4x_2 + 4x_3^2 - 4x_4x_3 + x_4^2.$$

НОП18◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -3 & -6-i & 1-i \\ -2i & 1+i & 3+3i & -2+i \\ -2i & 4i & 1+7i & -2-2i \\ -3i & -i & -2i & 1+5i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{12+i}{10} & \frac{1-2i}{10} & \frac{-11+2i}{10} & \frac{-2+9i}{10} \\ \frac{1-2i}{10} & \frac{3+4i}{10} & \frac{7+6i}{10} & \frac{-11+2i}{10} \\ \frac{-11+2i}{10} & \frac{7+6i}{10} & \frac{3+4i}{10} & \frac{1-2i}{10} \\ \frac{-2+9i}{10} & \frac{-11+2i}{10} & \frac{1-2i}{10} & \frac{12+i}{10} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП18◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{17}{13} & \frac{8}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{18}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{10}{13} & \frac{3}{13} & \frac{16}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{3}{13} & \frac{10}{13} & -\frac{16}{13} \\ \frac{18}{13} & \frac{16}{13} & -\frac{16}{13} & \frac{10}{13} \end{pmatrix}.$$

НОП18◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -6i & 1 & -2 \\ -2 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & 2 & -i \\ -1 & 2i & 2 \\ 2 & -5i & -2 \end{pmatrix}$$

НОП19◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-5x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 6x_4x_1 - x_2^2 - 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 2x_4x_3 - 4x_4^2.$$

НОП19◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-15-i}{10} & \frac{5-i}{5} & \frac{5-i}{5} & \frac{15-9i}{10} \\ \frac{5-i}{5} & \frac{-5+3i}{5} & \frac{5-2i}{5} & \frac{-5+i}{5} \\ \frac{5-i}{5} & \frac{5-2i}{5} & \frac{-5+3i}{5} & \frac{-5+i}{5} \\ \frac{15-9i}{10} & \frac{-5+i}{5} & \frac{-5+i}{5} & \frac{-15-i}{10} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -3 & 1+i & -10 \\ i & 1+i & -5 & 1+i \\ 2i & i & 1+2i & 4+2i \\ -3i & 3i & -10i & 1 \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП19◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{21}{10} & \frac{9}{10} \\ -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} & \frac{9}{10} & \frac{21}{10} \\ \frac{21}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} & \frac{21}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{12}{13} & \frac{16}{13} & \frac{18}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{2}{13} & \frac{24}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{16}{13} & \frac{24}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{18}{13} & \frac{2}{13} & \frac{6}{13} & -1 \end{pmatrix}.$$

НОП19◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2i & 5i & -2i \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -4 & -10i & 21 \\ -2 & -5i & 10 \\ -1 & -2i & 4 \end{pmatrix}$$

НОП20◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-8x_1^2 + 6x_2x_1 + 16x_4x_1 - x_2^2 - 2x_3x_2 - 6x_4x_2 + 17x_3^2 + 6x_4x_3 - 7x_4^2.$$

НОП20◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & -2+i & 1 \\ -4i & 1+5i & -1-4i & i \\ 0 & -i & 1+i & 5 \\ i & -3i & -i & 1-3i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-12+5i}{12} & \frac{-2+i}{4} & \frac{12+7i}{12} & \frac{6+5i}{12} \\ \frac{-2+i}{4} & \frac{-10+3i}{4} & \frac{2-i}{4} & \frac{-2+i}{4} \\ \frac{12+7i}{12} & \frac{2-i}{4} & \frac{-12+5i}{12} & \frac{-6-5i}{12} \\ \frac{6+5i}{12} & \frac{-2+i}{4} & \frac{-6-5i}{12} & \frac{-30-7i}{12} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП20◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

НОП20◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ -1 & i & 2i \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 1 & i & 3 \\ 0 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

НОП21◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-3x_1^2 + 16x_2x_1 - 6x_3x_1 - 4x_4x_1 - 5x_2^2 + 28x_3x_2 + 6x_4x_2 + x_3^2 - 6x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП21◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{6+7i}{12} & \frac{-4-3i}{12} & \frac{10-5i}{12} & \frac{8+7i}{12} \\ \frac{-4-3i}{12} & \frac{8+3i}{12} & \frac{4-i}{4} & \frac{4-3i}{12} \\ \frac{10-5i}{12} & \frac{4-i}{4} & \frac{-26+7i}{12} & \frac{-8+7i}{12} \\ \frac{8+7i}{12} & \frac{4-3i}{12} & \frac{-8+7i}{12} & \frac{-5i}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -1-i & i & -3-i \\ -4i & 1+5i & -3-4i & -6+5i \\ -i & 0 & 1 & i \\ -i & -2i & -i & 1-i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП21◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{19}{9} & \frac{14}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{19}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{16}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{14}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{3}{7} & 2 \\ -\frac{9}{7} & \frac{10}{7} & \frac{13}{7} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

НОП21◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2i & 2i \\ 2i & -1 & -2 \\ 2 & i & i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2i & 1 & -6i \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}$$

НОП22◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-12x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 10x_4x_1 - x_2^2 - 2x_3x_2 - 2x_4x_2 - x_3^2 - 2x_4x_3 - 2x_4^2.$$

НОП22◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -1 & i & -5-i \\ 0 & 1+i & i & -4+i \\ -i & 3i & 1+3i & -3+5i \\ i & -3i & i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-7+5i}{12} & \frac{-5-i}{4} & \frac{-17-5i}{12} & \frac{7+7i}{12} \\ \frac{-5-i}{4} & \frac{11+3i}{4} & \frac{5+i}{4} & \frac{5+i}{4} \\ \frac{-17-5i}{12} & \frac{5+i}{4} & \frac{-31-7i}{12} & \frac{17+5i}{12} \\ \frac{7+7i}{12} & \frac{5+i}{4} & \frac{17+5i}{12} & \frac{-7+5i}{12} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП22◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{22}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{9} \\ \frac{22}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{3} & \frac{19}{9} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

НОП22◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} i & i & -3i \\ -2 & -5 & 1 \\ i & 2i & -i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 3i & 5 & -14i \\ -i & -2 & 5i \\ i & 1 & -3i \end{pmatrix}$$

НОП23◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$15x_1^2 - 4x_2x_1 - 20x_3x_1 + 6x_4x_1 - x_2^2 - 4x_3x_2 + 6x_4x_2 - 2x_3^2 + 14x_4x_3 - 8x_4^2.$$

НОП23◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-19+9i}{13} & \frac{-7+4i}{13} & \frac{36-2i}{13} & \frac{7-4i}{13} \\ \frac{-7+4i}{13} & \frac{7-4i}{13} & \frac{16+2i}{13} & \frac{-7-9i}{13} \\ \frac{36-2i}{13} & \frac{16+2i}{13} & \frac{5+12i}{13} & \frac{-16-2i}{13} \\ \frac{7-4i}{13} & \frac{-7-9i}{13} & \frac{-16-2i}{13} & \frac{7-4i}{13} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -2-i & 2-i & 1 \\ -4i & 1+5i & 4i & -1 \\ 3i & -7i & 1-2i & -i \\ 2i & -i & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП23◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{22}{13} & \frac{22}{13} \\ -\frac{8}{13} & -\frac{22}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{20}{13} & \frac{22}{13} & -\frac{8}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{13}{10} & \frac{13}{10} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{13}{10} & -\frac{13}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{11}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП23◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -6 & -2i & i \\ i & 0 & 1 \\ -2 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & i & 2 \\ -2i & -2 & 5i \\ i & 2 & -2i \end{pmatrix}$$

НОП24◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-7x_1^2 + 4x_2x_1 - 12x_3x_1 - 4x_4x_1 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП24◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-7-7i}{12} & \frac{7-5i}{12} & \frac{3-i}{4} & \frac{-17-5i}{12} \\ \frac{7-5i}{12} & \frac{-7-7i}{12} & \frac{-3+i}{4} & \frac{17+5i}{12} \\ \frac{3-i}{4} & \frac{-3+i}{4} & \frac{-5+3i}{4} & \frac{-3+i}{4} \\ \frac{-17-5i}{12} & \frac{17+5i}{12} & \frac{-3+i}{4} & \frac{-31-7i}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 5+i & 5+i & -7+i \\ 4i & 1+5i & 4+4i & -1+4i \\ -3i & -i & 1-2i & -4-4i \\ 3i & 0 & 6i & 1+i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП24◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{21}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{21}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{18}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП24◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 2i & -i & -6 \\ 1 & 0 & 2i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 2i & 5 & 2i \\ -i & -2 & -2i \\ -1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

НОП25◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-8x_1^2 - 12x_2x_1 - 6x_3x_1 + 6x_4x_1 - 5x_2^2 - 4x_3x_2 + 4x_4x_2 - x_3^2 + 2x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП25◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & 3 & 1+i & 7+i \\ -4i & 1+i & -1-3i & 5-4i \\ 3i & -4i & 1 & -2+2i \\ i & 2i & 4i & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{3+9i}{10} & \frac{2+i}{5} & \frac{3-i}{10} & \frac{-2-i}{5} \\ \frac{2+i}{5} & \frac{6+3i}{5} & \frac{2+i}{5} & \frac{9+2i}{5} \\ \frac{3-i}{10} & \frac{2+i}{5} & \frac{3+9i}{10} & \frac{-2-i}{5} \\ \frac{-2-i}{5} & \frac{9+2i}{5} & \frac{-2-i}{5} & \frac{6+3i}{5} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП25◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{13}{12} & \frac{9}{4} & -\frac{23}{12} & -\frac{13}{12} \\ \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{23}{12} & -\frac{3}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{13}{12} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{12} & -\frac{29}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

НОП25◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -2i \\ 5i & 5i & -2 \\ -2 & -2 & -i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 2 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 2 & 5i \end{pmatrix}$$

НОП26◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$2x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 6x_4x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3 + 6x_4^2.$$

НОП26◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-34-9i}{12} & \frac{12+i}{12} & \frac{-16-5i}{12} & \frac{10-5i}{12} \\ \frac{12+i}{12} & \frac{-10-9i}{12} & \frac{14+i}{12} & \frac{8-7i}{12} \\ \frac{-16-5i}{12} & \frac{14+i}{12} & \frac{-2-i}{12} & \frac{-4+i}{4} \\ \frac{10-5i}{12} & \frac{8-7i}{12} & \frac{-4+i}{4} & \frac{-26+7i}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -5-i & -2+i & 1+i \\ -3i & 1+4i & -1-2i & 1-4i \\ -i & -3i & 1-4i & -2+2i \\ 4i & -8i & 2i & 1+7i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП26◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{7}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{7}{12} & -\frac{5}{12} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{7}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

НОП26◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & i \\ i & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ i & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

НОП27◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 - x_2^2 + 4x_3x_2 + 2x_4x_2 - 3x_3^2 - 8x_4x_3 + 4x_4^2.$$

НОП27◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -3-i & 1 & -6 \\ i & 1 & 3 & -6+i \\ 0 & 4i & 1+i & -1+3i \\ 2i & -5i & -3i & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5+4i}{10} & \frac{5+6i}{10} & \frac{i}{5} & \frac{i}{5} \\ \frac{5+6i}{10} & \frac{-5+4i}{10} & \frac{-i}{5} & \frac{-i}{5} \\ \frac{i}{5} & \frac{-i}{5} & \frac{-25-9i}{10} & \frac{15+i}{10} \\ \frac{i}{5} & \frac{-i}{5} & \frac{15+i}{10} & \frac{-25-9i}{10} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП27◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & \frac{6}{7} & -1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

НОП27◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2i \\ -2i & 2i & -1 \\ -1 & 2 & i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2i & 1 & -6i \end{pmatrix}$$

НОП28◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-4x_1^2 + 2x_2x_1 + 10x_3x_1 - x_2^2 + 6x_3x_2 + 4x_4x_2 - 13x_3^2 - 18x_4x_3 - 5x_4^2.$$

НОП28◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1-3i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{1+i}{4} \\ \frac{-1-i}{4} & \frac{5+i}{4} & \frac{-7-3i}{4} & \frac{-5-i}{4} \\ \frac{-1-i}{4} & \frac{-7-3i}{4} & \frac{5+i}{4} & \frac{-5-i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{-5-i}{4} & \frac{-5-i}{4} & \frac{-7-3i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1 & -1+i \\ 2i & 1+i & -1 & -1+2i \\ 3i & 0 & 1+i & 4+3i \\ 4i & -3i & -4i & 1+5i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП28◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{2} & -1 & -\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & -1 & 2 & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{27}{10} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{27}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{27}{10} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{7}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{27}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{5} & -\frac{27}{10} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП28◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -3i & 6i & -2 \\ 2 & -3 & -i \\ -i & 2i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ -i & 1 & i \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

НОП29◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-7x_1^2 + 4x_2x_1 + 8x_3x_1 + 16x_4x_1 - x_2^2 - 2x_3x_2 - 6x_4x_2 - 2x_3^2 - 8x_4x_3 - 10x_4^2.$$

НОП29◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 6-i & -4 \\ 3i & 1-2i & -3-2i & 1+i \\ 2i & -2i & 1-i & 3-i \\ 2i & i & 4i & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5+2i}{10} & \frac{1-4i}{10} & \frac{6+i}{5} & \frac{3i}{5} \\ \frac{1-4i}{10} & \frac{-5+2i}{10} & \frac{-3i}{5} & \frac{-6-i}{5} \\ \frac{6+i}{5} & \frac{-3i}{5} & \frac{-5-7i}{10} & \frac{-19+i}{10} \\ \frac{3i}{5} & \frac{-6-i}{5} & \frac{-19+i}{10} & \frac{-5-7i}{10} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП29◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{8}{11} & \frac{25}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{25}{11} & -\frac{8}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{10}{11} & \frac{10}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{20}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & \frac{23}{11} \end{pmatrix}.$$

НОП29◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 5i & -2 & 2 \\ 2 & i & -2i \\ 2i & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 2i \\ 2 & i & -6 \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$$

НОП30◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$2x_1^2 + 12x_2x_1 + 6x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3 + x_4^2.$$

НОП30◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-i}{4} & \frac{-2+3i}{4} & \frac{2-i}{4} & \frac{4-i}{4} \\ \frac{-2+3i}{4} & \frac{-i}{4} & \frac{4-i}{4} & \frac{2-i}{4} \\ \frac{2-i}{4} & \frac{4-i}{4} & \frac{-i}{4} & \frac{-2+3i}{4} \\ \frac{4-i}{4} & \frac{2-i}{4} & \frac{-2+3i}{4} & \frac{-i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -3-i & -1 & 2+i \\ 0 & 1+i & -i & -6-i \\ -2i & 3i & 1 & 3-4i \\ -i & -3i & 5i & 1+3i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП30◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{18}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{15}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{8}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{15}{7} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

НОП30◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6i & -5i & -2i \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2i & -2 \\ -2 & 5i & -6 \\ 2 & -6i & 9 \end{pmatrix}$$

НОП31◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы
 $-4x_1^2 - 6x_2x_1 + 8x_3x_1 + 8x_4x_1 - x_2^2 + 4x_3x_2 + 6x_4x_2 - 3x_3^2 - 10x_4x_3.$

НОП31◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-7i}{12} & \frac{-5i}{12} & \frac{4-i}{4} & \frac{-5i}{12} \\ \frac{-5i}{12} & \frac{-6-7i}{12} & \frac{-4+i}{4} & \frac{6+5i}{12} \\ \frac{4-i}{4} & \frac{-4+i}{4} & \frac{-8+3i}{4} & \frac{-4+i}{4} \\ \frac{-5i}{12} & \frac{6+5i}{12} & \frac{-4+i}{4} & \frac{-6-7i}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 3-i & 4 & -5+i \\ 2i & 1-i & 3+i & -6+i \\ -3i & 7i & 1+5i & -4-8i \\ i & -3i & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП31◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -\frac{6}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{6}{7} & 2 & \frac{4}{7} & -\frac{16}{7} \\ \frac{12}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{2}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{13}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{29}{10} \end{pmatrix}.$$

НОП31◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2i & 5i & 2i \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 4 \\ 2 & -5i & 10 \\ -4 & 10i & -21 \end{pmatrix}$$

НОП32◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы
 $-17x_1^2 + 6x_2x_1 - 12x_3x_1 + 6x_4x_1 - x_2^2 + 4x_3x_2 - 4x_4x_2 - 4x_3^2 + 8x_4x_3 - 5x_4^2.$

НОП32◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -2 & -4 \\ -2i & 1+i & 2+i & 5 \\ 4i & 2i & 1+3i & -1+i \\ i & 0 & 4i & 1+5i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-9+9i}{10} & \frac{-1+i}{5} & \frac{1+i}{10} & \frac{-1-i}{5} \\ \frac{-1+i}{5} & \frac{-3+3i}{5} & \frac{-1-i}{5} & \frac{2+2i}{5} \\ \frac{1+i}{10} & \frac{-1-i}{5} & \frac{23-7i}{10} & \frac{7-3i}{5} \\ \frac{-1-i}{5} & \frac{2+2i}{5} & \frac{7-3i}{5} & \frac{1+i}{5} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП32◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{11}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{11}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{9} & -1 \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{17}{9} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{14}{9} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} & \frac{20}{9} \\ -\frac{14}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & \frac{4}{3} & -\frac{20}{9} \end{pmatrix}.$$

НОП32◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 5i & -2 & -2 \\ -2 & -i & -2i \\ 2i & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 2i \\ 2 & -i & -6 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

НОП33◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы
 $x_1^2 + 4x_2x_1 + 7x_2^2 + 4x_3x_2 + 6x_4x_2 + x_3^2 + 4x_4x_3 + 4x_4^2$.

НОП33◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{3-2i}{3} & \frac{7-i}{9} & \frac{2+4i}{9} & \frac{1-i}{9} \\ \frac{7-i}{9} & \frac{12-8i}{9} & \frac{-5-2i}{9} & \frac{-2-3i}{9} \\ \frac{2+4i}{9} & \frac{-5-2i}{9} & \frac{7-3i}{9} & \frac{3+2i}{9} \\ \frac{1-i}{9} & \frac{-2-3i}{9} & \frac{3+2i}{9} & \frac{26+8i}{9} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 3-i & 1+i & 4+i \\ -3i & 1+4i & -4-3i & 4-2i \\ -i & 0 & 1 & 1-3i \\ 4i & -6i & 4i & 1+3i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП33◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{25}{12} & \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{12} & \frac{1}{12} & \frac{13}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} & \frac{25}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{33}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{33}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

НОП33◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -6 & 2i & i \\ i & 0 & 1 \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -1 & i & -2 \\ 2i & 2 & 5i \\ i & 2 & 2i \end{pmatrix}$$

НОП34◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы
 $2x_1^2 + 4x_2x_1 + 6x_3x_1 - 2x_4x_1 + 3x_2^2 + 16x_3x_2 - 4x_4x_2 + 5x_3^2 - 6x_4x_3 + x_4^2$.

НОП34◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & 3+i & 5+i & i \\ 0 & 1+i & 0 & -1+i \\ 3i & 0 & 1+4i & 3-i \\ 0 & 4i & -2i & 1+7i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-18-5i}{12} & \frac{6+5i}{12} & \frac{-2-i}{4} & \frac{6+7i}{12} \\ \frac{6+5i}{12} & \frac{-6+7i}{12} & \frac{2+i}{4} & \frac{6+5i}{12} \\ \frac{-2-i}{4} & \frac{2+i}{4} & \frac{-10-3i}{4} & \frac{-2-i}{4} \\ \frac{6+7i}{12} & \frac{6+5i}{12} & \frac{-2-i}{4} & \frac{-18-5i}{12} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП34◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{15}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{15}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{18}{7} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

НОП34◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -5i & 2 & -2 \\ -2 & -i & 2i \\ -2i & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & -2i \\ -2 & -i & 6 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

НОП35◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-8x_1^2 + 14x_2x_1 + 6x_3x_1 - 6x_4x_1 - 4x_2^2 - 4x_3x_2 + 4x_4x_2 + 2x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП35◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-6-3i}{5} & \frac{3-i}{5} & \frac{-10-2i}{5} & \frac{5+i}{5} \\ \frac{3-i}{5} & \frac{-3-9i}{10} & \frac{5+i}{5} & \frac{-5-i}{10} \\ \frac{-10-2i}{5} & \frac{5+i}{5} & \frac{-7-3i}{5} & \frac{1-i}{5} \\ \frac{5+i}{5} & \frac{-5-i}{10} & \frac{1-i}{5} & \frac{-11-9i}{10} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & -i & 0 \\ 2i & 1-i & 3-i & 1 \\ 4i & -3i & 1-2i & -1 \\ -4i & 4i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП35◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -3 & 2 \\ -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{2}{5} & -2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{3}{2} & 2 \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{2}{5} & \frac{13}{10} \end{pmatrix}.$$

НОП35◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2i & -i \\ 2i & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4i & 9 \\ -i & -1 & 2i \\ -i & -2 & 4i \end{pmatrix}$$

НОП36◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-x_1^2 + 4x_2x_1 + 10x_3x_1 - 2x_4x_1 - 10x_2^2 + 6x_4x_2 - 9x_3^2 + 2x_4x_3 - x_4^2.$$

НОП36◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & i & 4-i & -5-i \\ 0 & 1+i & -3-i & 3+i \\ -2i & -2i & 1+3i & 1+i \\ -2i & i & 3i & 1+2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{15-5i}{12} & \frac{33-7i}{12} & \frac{15+7i}{12} & \frac{1+i}{4} \\ \frac{33-7i}{12} & \frac{15-5i}{12} & \frac{-15-7i}{12} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{15+7i}{12} & \frac{-15-7i}{12} & \frac{-33-5i}{12} & \frac{1+i}{4} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{-1-i}{4} & \frac{1+i}{4} & \frac{-3+i}{4} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП36◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 2 \\ \frac{2}{5} & -2 & 2 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 2 & 1 & \frac{8}{5} \\ 2 & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

НОП36◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 & -i \\ i & -2 & 2i \\ i & -2 & 3i \end{pmatrix}$$

НОП37◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$9x_1^2 + 2x_2x_1 - 16x_3x_1 + 4x_4x_1 + 8x_2^2 - 8x_3x_2 + 4x_4x_2 + 10x_3^2 - 6x_4x_3 + x_4^2.$$

НОП37◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{3-5i}{7} & \frac{-9+4i}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{9+i}{7} \\ \frac{-9+4i}{7} & \frac{-13+3i}{7} & \frac{-18+4i}{7} & \frac{-7+i}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{-18+4i}{7} & \frac{i}{7} & \frac{6-2i}{7} \\ \frac{9+i}{7} & \frac{-7+i}{7} & \frac{6-2i}{7} & \frac{17-6i}{7} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 0 & 1-i \\ -4i & 1+i & 4 & 7+3i \\ 0 & -2i & 1+i & -1+3i \\ -i & i & 3i & 1+4i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП37◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} & \frac{-6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

НОП37◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 2i & 2i & 5 \\ -2 & -1 & 2i \\ -i & -i & -2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -i \\ 2i & 1 & 6i \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

НОП38◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 + 2x_2x_1 + 6x_3x_1 + 6x_4x_1 + x_2^2 + 4x_3x_2 + 6x_4x_2 + 10x_3^2 + 20x_4x_3 + 8x_4^2.$$

НОП38◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{3-3i}{5} & \frac{-1+i}{5} & \frac{1-i}{5} & \frac{3+2i}{5} \\ \frac{-1+i}{5} & \frac{-6+i}{10} & \frac{-24+9i}{10} & \frac{-1+i}{5} \\ \frac{1-i}{5} & \frac{-24+9i}{10} & \frac{-6+i}{10} & \frac{1-i}{5} \\ \frac{3+2i}{5} & \frac{-1+i}{5} & \frac{1-i}{5} & \frac{3-3i}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & -2-i & -i & 4+i \\ -2i & 1+3i & 3+2i & -3-i \\ 4i & -4i & 1-3i & 4i \\ -2i & -i & 3i & 1-4i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП38◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{14}{11} & \frac{-3}{11} & \frac{12}{11} & \frac{-16}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{14}{11} & \frac{-12}{11} & \frac{16}{11} \\ \frac{12}{11} & \frac{-12}{11} & \frac{15}{11} & \frac{24}{11} \\ \frac{-16}{11} & \frac{16}{11} & \frac{24}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

НОП38◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2i & -i & -2 \\ 5 & 2 & -2i \\ 2i & i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \\ -i & -2 & -6i \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

НОП39◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 + 6x_2x_1 - 4x_3x_1 - 6x_4x_1 + 8x_2^2 - 8x_3x_2 - 22x_4x_2 - x_3^2 + 22x_4x_3 + 4x_4^2.$$

НОП39◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -4 & 7-i & 3-i \\ 4i & 1+i & -2-5i & -1-5i \\ -3i & 0 & 1+4i & 1+2i \\ -3i & 3i & -4i & 1+5i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-1+2i}{5} & \frac{9+2i}{10} & \frac{6+3i}{5} & \frac{1-2i}{10} \\ \frac{9+2i}{10} & \frac{-8+i}{10} & \frac{1-2i}{10} & \frac{18+9i}{10} \\ \frac{6+3i}{5} & \frac{1-2i}{10} & \frac{-1+2i}{5} & \frac{9+2i}{10} \\ \frac{1-2i}{10} & \frac{18+9i}{10} & \frac{9+2i}{10} & \frac{-8+i}{10} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП39◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{21}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{21}{10} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

НОП39◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} i & -3 & -1 \\ 0 & -i & -i \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} i & -1 & -2i \\ -1 & -i & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

НОП40◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$5x_1^2 - 4x_3x_1 - 8x_4x_1 + 3x_2^2 + 4x_4x_2 + x_3^2 + 4x_4x_3 + 5x_4^2.$$

НОП40◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{4} & \frac{-5+i}{4} & \frac{-5+i}{4} & \frac{-5+i}{4} \\ \frac{-5+i}{4} & \frac{-13-i}{12} & \frac{-13+11i}{12} & \frac{-7-i}{12} \\ \frac{-5+i}{4} & \frac{-13+11i}{12} & \frac{-13-i}{12} & \frac{-7-i}{12} \\ \frac{-5+i}{4} & \frac{-7-i}{12} & \frac{-7-i}{12} & \frac{-19+11i}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 & 2-i \\ 2i & 1+3i & -3 & 3-3i \\ 2i & 2i & 1+i & -1-2i \\ 0 & 3i & 3i & 1-2i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП40◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{21}{13} & \frac{8}{13} & \frac{22}{13} & \frac{18}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{18}{13} & \frac{4}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{22}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{28}{13} & -\frac{4}{13} \\ \frac{18}{13} & \frac{8}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{8}{13} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

НОП40◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -i & -2i & i \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4i & -11 \\ -1 & 2i & 4 \\ 1 & -i & -3 \end{pmatrix}$$

НОП41◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$9x_1^2 - 20x_2x_1 + 6x_3x_1 - 16x_4x_1 + 8x_2^2 - 6x_3x_2 + 14x_4x_2 + x_3^2 - 6x_4x_3 + 13x_4^2.$$

НОП41◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{16+i}{12} & \frac{-4-i}{12} & \frac{-i}{4} & \frac{-8-11i}{12} \\ \frac{-4-i}{12} & \frac{4-11i}{12} & \frac{i}{4} & \frac{-4-i}{12} \\ \frac{-i}{4} & \frac{i}{4} & \frac{4-i}{4} & \frac{-i}{4} \\ \frac{-8-11i}{12} & \frac{-4-i}{12} & \frac{-i}{4} & \frac{16+i}{12} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 3-i & 0 \\ 0 & 1+i & -2 & -3 \\ -3i & 3i & 1+4i & -3+i \\ -i & 4i & 3i & 1+3i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП41◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{3}{4} & -\frac{29}{12} & -\frac{5}{12} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{29}{12} & \frac{3}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{17}{12} \end{pmatrix}.$$

НОП41◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} -2 & 9i & 6i \\ -2i & -6 & -5 \\ 1 & -2i & -2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -2 & -6i & 9 \\ -i & 2 & 2i \\ 2i & -5 & -6i \end{pmatrix}$$

НОП42◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$-8x_1^2 + 6x_2x_1 + 12x_3x_1 + 18x_4x_1 - x_2^2 - 6x_3x_2 - 4x_4x_2 - 30x_4x_3 + 4x_4^2.$$

НОП42◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -1+i & -i & 3+i \\ -3i & 1-2i & -3+2i & -4-4i \\ -2i & -3i & 1+4i & 4-i \\ i & i & i & 1+2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-5+3i}{4} & \frac{3-i}{4} & \frac{-3+i}{4} & \frac{-5-i}{4} \\ \frac{3-i}{4} & \frac{-3+3i}{4} & \frac{7+i}{4} & \frac{3-i}{4} \\ \frac{-3+i}{4} & \frac{7+i}{4} & \frac{-3+3i}{4} & \frac{-3+i}{4} \\ \frac{-5-i}{4} & \frac{3-i}{4} & \frac{-3+i}{4} & \frac{-5+3i}{4} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП42◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{27}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{10}{13} & \frac{16}{13} \\ -\frac{8}{13} & -\frac{35}{13} & \frac{8}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{8}{13} & \frac{29}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{16}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{10}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}.$$

НОП42◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 2i & -2i & -i \\ 2 & -5 & -2 \\ i & -2i & -i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 0 & -1 & -2i \\ -i & 2 & 6i \end{pmatrix}$$

НОП43◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 12x_2x_1 - 4x_3x_1 + 6x_4x_1 + 3x_2^2 + 4x_3x_2 + 18x_4x_2 + x_3^2 + 6x_4x_3 + 10x_4^2.$$

НОП43◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{9+7i}{10} & \frac{-1-i}{5} & \frac{-1-i}{10} & \frac{-1-3i}{5} \\ \frac{-1-i}{5} & \frac{-1-3i}{5} & \frac{7+i}{5} & \frac{-2-2i}{5} \\ \frac{-1-i}{10} & \frac{7+i}{5} & \frac{-23-9i}{10} & \frac{-1-i}{5} \\ \frac{-1-3i}{5} & \frac{-2-2i}{5} & \frac{-1-i}{5} & \frac{3-i}{5} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1+i & 3-i & -7 & -6 \\ 4i & 1-3i & -1-i & 4 \\ -4i & 4i & 1+i & -3+i \\ 2i & 2i & -6i & 1-i \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП43◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

НОП43◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2i & -5i & 2i \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 4 & 10i & -21 \\ 2 & 5i & -10 \\ 1 & 2i & -4 \end{pmatrix}$$

НОП44◊1. Найдите ранг и сигнатуру вещественной квадратичной формы

$$x_1^2 - 4x_2x_1 + 6x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 - 16x_3x_2 - 6x_4x_2 + 14x_3^2 + 10x_4x_3 + 4x_4^2.$$

НОП44◊2. Существует ли эрмитовом пространстве \mathbb{C}^4 ортогональный базис из собственных векторов оператора, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1+i & -2+i & 1-i & 5-i \\ -i & 1 & 3+i & -2 \\ 0 & 3i & 1+i & 3-3i \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \frac{-27+9i}{10} & \frac{-8+i}{5} & \frac{7+i}{10} & \frac{-2-i}{5} \\ \frac{-8+i}{5} & \frac{-9+3i}{5} & \frac{-2-i}{5} & \frac{-1+2i}{5} \\ \frac{7+i}{10} & \frac{-2-i}{5} & \frac{-27+9i}{10} & \frac{-8+i}{5} \\ \frac{-2-i}{5} & \frac{-1+2i}{5} & \frac{-8+i}{5} & \frac{-9+3i}{5} \end{pmatrix}$$

(найдите такой базис и собственные значения базисных векторов или объясните почему его нет).

НОП44◊3. Предъявите какие-нибудь собственные ортогональные базисы и найдите диагональный вид симметричных операторов, заданных в стандартном базисе евклидова пространства \mathbb{R}^4 матрицами

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{21}{10} \\ \frac{8}{5} & \frac{17}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{17}{10} & -\frac{8}{5} \\ \frac{21}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

НОП44◊4. Найдите эрмитовы матрицы S_1, S_2 и унитарные матрицы I_1, I_2 , такие что

$$\text{а) } S_1 \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 2i & 3i & 6i \\ 2 & 5 & 3 \\ -i & -2i & -2i \end{pmatrix} \quad \text{б) } I_2 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 4i & -6 & 21i \\ -i & 2 & -6i \\ -i & 1 & -4i \end{pmatrix}$$