ОГ1◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (3,-6,1,0)$, $u_4 = (1,0,0,0)$, $u_5 = (-18,19,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,-1,-3,-4)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ1◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & -3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ1◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_3x_1 + 4\,x_4x_1 + {x_2}^2 - 4\,x_3x_2 - 2\,x_4x_2 + 7\,{x_3}^2 - 2\,x_4x_3 + 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ1◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -6 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5,-5,-1,1,1)$ и $(-8,11,4,-4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ1◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ2◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (3,1,0,0)$, $u_3 = (9,2,1,0)$, $u_4 = (13,6,2,0)$, $u_5 = (-16,-6,-2,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,0,-2,-3)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ2◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ2◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 + 4\,x_4x_1 + 3\,{x_2}^2 - 4\,x_3x_2 - 8\,x_4x_2 - {x_3}^2 + 8\,x_4x_3 + 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ2◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5,2,3,-1,1)$ и $(1,-17,-12,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ2◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ3◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-3,1,0,0)$, $u_3 = (14,-7,1,0)$, $u_4 = (-12,-3,2,0)$, $u_5 = (19,-10,2,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,1,-1,-2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ3◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ3◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 2\,x_2x_1 + 2\,{x_2}^2 + 2\,x_3x_2 + 2\,{x_3}^2 - {x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ3◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 6\,x_3 + 12\,x_4 + 3\,x_5 = 0 \\ x_3 + 2\,x_4 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(33,-10,6,4,-1)$ и $(-24,10,0,5,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ3◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ4◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-7,1,0,0)$, $u_3 = (-7,2,1,0)$, $u_4 = (-7,-2,4,0)$, $u_5 = (12,-4,0,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,2,0,-1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ4◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ4◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 4\,x_2x_1 - 2\,x_3x_1 - 2\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 - 6\,x_4x_2 + 4\,{x_3}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ4◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -6 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & -7 & -4 \\ -1 & 4 & 5 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 5\,x_3 - 5\,x_4 - 18\,x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + 4\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-16,-5,4,2,1)$ и $(58,11,-16,-8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ4◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ5$\diamond$1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (-12,-1,1,0)$, $u_4 = (-12,8,-1,0)$, $u_5 = (13,-3,0,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,-2,1,0)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ5$\diamond$2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & -1/4 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ5$\diamond$3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 8x_3x_2 - 2x_4x_2 - {x_3}^2 + 8x_4x_3 - 6{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ5$\diamond$4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & -6 & 5 & -4 \\ -2 & -6 & -9 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5,-4,1,-1,1)$ и $(10,7,-4,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ5$\diamond$5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\,?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ6◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-4,1,0,0)$, $u_3 = (7,0,1,0)$, $u_4 = (-8,5,-1,0)$, $u_5 = (-13,9,-3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,-1,2,1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ6◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2 \\ -1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ -1/4\sqrt{3} & -1/4 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ6◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4x_2x_1 + 2x_3x_1 + 5{x_2}^2 - 6x_3x_2 + 3{x_3}^2 - 4x_4x_3 + 3{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ6◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(12,-3,-4,-1,1)$ и $(-27,3,16,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ6◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ7◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-3,1,0,0)$, $u_3 = (4,5,1,0)$, $u_4 = (8,16,4,0)$, $u_5 = (5,7,1,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,0,-4,2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ7◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & 1/4 & -1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ7◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 - 2\,x_4x_1 + 2\,{x_2}^2 + 2\,x_4x_2 + 7\,{x_3}^2 - 4\,x_4x_3$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ7◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 - x_3 + x_4 + 5\,x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2,0,2,1,-1)$ и $(-34,30,-5,-10,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ7◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ8◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-5,1,0,0)$, $u_3 = (-6,5,1,0)$, $u_4 = (-8,5,2,0)$, $u_5 = (8,-1,-3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,1,-3,3)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ8◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & -1/4 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ8◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 - 4\,x_3x_1 - 2\,x_4x_1 + 3\,{x_2}^2 + 10\,x_3x_2 + 4\,x_4x_2 + 2\,{x_3}^2 - 4\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ8◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3\,x_4 + x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 2\,x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6,-1,1,0,1)$ и $(-3,-5,-4,0,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ8◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\,?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ9◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (3,4,1,0)$, $u_4 = (1,7,2,0)$, $u_5 = (-3,4,0,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,2,-2,4)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ9◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ9◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 2\,x_2x_1 - 4\,x_3x_1 + 2\,{x_2}^2 - 6\,x_3x_2 - 4\,x_4x_2 + 6\,{x_3}^2 + 4\,x_4x_3 + 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ9◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & -3 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 - 10\,x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-7,-3,3,-1,1)$ и $(31,3,-12,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ9◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ10◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (3,1,0,0)$, $u_3 = (7,5,1,0)$, $u_4 = (-14,1,1,0)$, $u_5 = (21,-12,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,-2,-1,5)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ10◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ10◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 2\,x_2x_1 + 2\,{x_2}^2 + 2\,x_3x_2 - {x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ10◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -6 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & -10 & 2 \\ 2 & -6 & -10 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 - 6\,x_4 - 2\,x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + 2\,x_4 + 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(0,-5,2,1,1)$ и $(-6,11,-8,-4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ10◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ11◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (13,-2,1,0)$, $u_4 = (3,-6,-2,0)$, $u_5 = (0,7,3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,-1,0,-5)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ11◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ11◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 4\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 - 4\,x_4x_1 + 3\,{x_2}^2 + 4\,x_3x_2 - 12\,x_4x_2 - {x_3}^2 - 20\,x_4x_3 - 5\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ11◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3\,x_5 = 0 \\ x_3 + 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3,-5,-2,3,-1)$ и $(6,-10,-10,0,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ11◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ12◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (2,1,0,0)$, $u_3 = (10,-3,1,0)$, $u_4 = (-2,0,-1,0)$, $u_5 = (10,-5,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,0,1,-4)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ12◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ -1/4\sqrt{3} & 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ12◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы $x_1{}^2 - 4\,x_2x_1 - 2\,x_3x_1 + 5\,x_2{}^2 + 2\,x_4x_2 + 6\,x_3{}^2 - 6\,x_4x_3 + x_4{}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ12◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -10 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3\,x_4 + 2\,x_5 = 0 \\ \qquad x_3 + 2\,x_4 - 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7,0,-3,-1,1)$ и $(-7,-9,12,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ12◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ13◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (4,1,0,0)$, $u_3 = (13,0,1,0)$, $u_4 = (17,-4,3,0)$, $u_5 = (-10,8,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,1,2,-3)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ13◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2 & -3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ13◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2\,x_3x_1 + 2\,x_4x_1 + {x_2}^2 + 4\,x_3x_2 + 2\,x_4x_2 + 4\,{x_3}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ13◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2\,x_4 + 3\,x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7,-8,3,-1,1)$ и $(-16,23,-12,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ13◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ14◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-3,1,0,0)$, $u_3 = (3,0,1,0)$, $u_4 = (-8,4,-3,0)$, $u_5 = (12,-2,4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,2,-4,-2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ14◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ14◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_4x_2 - {x_3}^2 + 8x_4x_3 - 4{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ14◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7,-2,1,-1,1)$ и $(-7,-1,-4,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ14◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ15◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-3,1,0,0)$, $u_3 = (4,-1,1,0)$, $u_4 = (5,-4,4,0)$, $u_5 = (10,-6,2,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,-2,-3,-1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ15◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ15◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 4\,x_2x_1 + 2\,x_3x_1 + 2\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 + 4\,x_3x_2 + 2\,{x_3}^2 + 5\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ15◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_3 + 3\,x_4 - 11\,x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 2\,x_4 + 5\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(20,12,-11,5,-1)$ и $(46,30,-25,10,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ15◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ16◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (4,1,0,0)$, $u_3 = (7,-4,1,0)$, $u_4 = (7,6,-1,0)$, $u_5 = (26,-13,4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,-1,-2,0)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ16◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ16◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 - 2\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 - 6\,x_3x_2 + 4\,{x_3}^2 - 10\,x_4x_3 + 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ16◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3\,x_4 - 5\,x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2,-3,0,1,1)$ и $(11,3,0,-4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ16◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 < 0,\ \Delta_5 = 0,\ \Delta_6 > 0,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ17◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-8,1,0,0)$, $u_3 = (-8,3,1,0)$, $u_4 = (19,-3,2,0)$, $u_5 = (-4,0,-1,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,0,-1,1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ17◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ17◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 + 4\,x_4x_1 - 6\,x_3x_2 + 2\,{x_3}^2 + 12\,x_4x_3 - {x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ17◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -9 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 6\,x_3 - 8\,x_4 + 26\,x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - 4\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(28,9,-4,-2,1)$ и $(-118,-45,16,8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ17◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ18◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-5,1,0,0)$, $u_3 = (2,0,1,0)$, $u_4 = (7,-4,1,0)$, $u_5 = (4,-4,2,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,1,0,2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ18◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ18◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2+4\,x_4x_1+{x_2}^2+2\,x_3x_2+4\,x_4x_2+2\,{x_3}^2+4\,x_4x_3+7\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ18◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1,-3,-2,-2,1)$ и $(-10,3,8,8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ18◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ19◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-1,1,0,0)$, $u_3 = (16,0,1,0)$, $u_4 = (7,-10,-2,0)$, $u_5 = (-9,13,3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,2,1,3)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ19◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ19◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 + 2\,x_3x_1 + 2\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 - 4\,x_3x_2 + 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ19◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4 - 8\,x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-4,-2,-1,1,-1)$ и $(31,20,-5,-10,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ19◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ20◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (5,1,0,0)$, $u_3 = (-6,-2,1,0)$, $u_4 = (17,4,3,0)$, $u_5 = (-5,-2,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,-2,2,4)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ20◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ20◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_3x_1 + 4\,x_4x_1 - {x_2}^2 - 2\,x_3x_2 + 2\,x_4x_2 + 2\,{x_3}^2 - 8\,x_4x_3 + {x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ20◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2\,x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_3 + 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6,-6,2,0,1)$ и $(-12,15,-8,0,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ20◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ21◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-2,1,0,0)$, $u_3 = (-3,-6,1,0)$, $u_4 = (2,8,-2,0)$, $u_5 = (3,2,-1,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,-1,-4,5)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ21◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ21◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2{x_2}^2 - 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + 6{x_3}^2 + 4{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ21◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -6 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & -4 & -8 \\ -2 & 4 & -4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 13x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(15,7,-4,2,1)$ и $(-66,-37,16,-8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ21◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 = 0,\ \Delta_4 > 0,\ \Delta_5 = 0,\ \Delta_6 > 0,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ22◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-6,1,0,0)$, $u_3 = (10,1,1,0)$, $u_4 = (-10,-8,-3,0)$, $u_5 = (4,-13,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,0,-3,-5)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ22◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ22◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2+2\,x_3x_1-4\,x_4x_1+{x_2}^2+2\,x_3x_2+2\,x_4x_2+{x_3}^2-6\,x_4x_3$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ22◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -7 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3\,x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2,6,-1,2,1)$ и $(13,-33,4,-8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ22◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ23⋄1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (3,1,0,0)$, $u_3 = (-4,-5,1,0)$, $u_4 = (-6,3,-1,0)$, $u_5 = (-2,-18,4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,1,-2,-4)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ23⋄2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ23⋄3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 2\,x_2x_1 + 2\,x_3x_2 - 4\,x_4x_2 - 2\,{x_3}^2 + 6\,x_4x_3 - 6\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ23⋄4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_5 = 0 \\ x_3 + 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-6,-1,-2,2,-1)$ и $(-39,-20,-10,-5,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ23⋄5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ24⋄1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-6,1,0,0)$, $u_3 = (-16,3,1,0)$, $u_4 = (15,-8,4,0)$, $u_5 = (11,-7,3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,2,-1,-3)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ24⋄2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ24⋄3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 + 2\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 - 2\,x_3x_2 - 4\,x_4x_2 + 2\,{x_3}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ24⋄4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & -6 & 4 \\ -2 & 3 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2\,x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 - 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1,0,-2,-1,1)$ и $(-1,-9,8,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ24⋄5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ25◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (0,1,1,0)$, $u_4 = (11,-16,-3,0)$, $u_5 = (-3,3,0,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,-2,0,-2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ25◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2 & -3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ25◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 + 4\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 - 2\,x_3x_2 - 10\,x_4x_2 - 2\,x_4x_3$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ25◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & -6 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 4\,x_3 - x_4 - 6\,x_5 = 0 \\ x_3 + 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-4,-2,2,-1,1)$ и $(10,-1,-8,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ25◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ26◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-3,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$, $u_4 = (9,-5,-1,0)$, $u_5 = (6,4,2,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,-1,1,-1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ26◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ26◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 4\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 - 4\,x_4x_1 + 3\,{x_2}^2 + 8\,x_3x_2 - 6\,x_4x_2 + 3\,{x_3}^2 - 8\,x_4x_3 + 2\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ26◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad\quad x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3,-1,1,-1,1)$ и $(-9,-5,-4,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ26◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ27◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-7,1,0,0)$, $u_3 = (6,-4,1,0)$, $u_4 = (-4,-9,4,0)$, $u_5 = (10,7,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,0,2,0)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ27◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ27◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 2\,x_2x_1 - 4\,x_3x_1 + 2\,{x_2}^2 - 2\,x_3x_2 + 4\,x_4x_2 + 6\,{x_3}^2 + 8\,x_4x_3 + 7\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ27◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 3\,x_4 - 4\,x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(13,3,-2,3,-1)$ и $(11,0,5,0,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ27◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ28◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (4,1,0,0)$, $u_3 = (-7,-7,1,0)$, $u_4 = (18,16,-4,0)$, $u_5 = (3,3,0,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,1,-4,1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ28◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ28◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2\,x_3x_1 + 4\,x_4x_1 + {x_2}^2 - 2\,x_4x_2 - 6\,x_4x_3 + 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ28◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + 7\,x_4 + 4\,x_5 = 0 \\ x_3 - 2\,x_4 - 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6,4,-3,1,1)$ и $(-30,-25,12,-4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ28◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 < 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ29◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-2,1,0,0)$, $u_3 = (-3,5,1,0)$, $u_4 = (10,-2,1,0)$, $u_5 = (0,7,2,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,2,-3,2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ29◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ29◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 - 4\,x_3x_1 - 2\,x_4x_1 + 3\,{x_2}^2 + 6\,x_3x_2 + 2\,{x_3}^2 - 2\,x_4x_3 - 5\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ29◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & -6 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 + 2\,x_4 - 3\,x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2\,x_4 - 2\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1,-1,-2,1,1)$ и $(-2,-5,8,-4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ29◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 < 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ30◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-1,1,0,0)$, $u_3 = (-13,6,1,0)$, $u_4 = (-7,9,2,0)$, $u_5 = (-1,-3,-1,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,-2,-2,3)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ30◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ30◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 4\,x_2x_1 + 2\,x_3x_1 - 4\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 + 4\,x_3x_2 - 10\,x_4x_2 + 2\,{x_3}^2 - 6\,x_4x_3 + 5\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ30◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3\,x_3 + 3\,x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5,-3,1,1,1)$ и $(1,3,-4,-4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ30◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 < 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ31◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (2,1,0,0)$, $u_3 = (5,1,1,0)$, $u_4 = (-1,7,-3,0)$, $u_5 = (-9,0,-3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,-1,-1,4)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ31◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ31◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 - 2\,x_3x_1 + 5\,{x_2}^2 + 4\,x_3x_2 + 2\,x_4x_2 + 2\,x_4x_3 - {x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ31◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 - x_3 - x_4 - 5\,x_5 = 0 \\ x_3 + 2\,x_4 + 4\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2,1,2,1,-1)$ и $(16,-25,-20,-10,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ31◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 < 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ32◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (0,-2,1,0)$, $u_4 = (3,-2,0,0)$, $u_5 = (-1,-3,0,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,0,0,5)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ32◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ32◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2+2\,x_3x_1+4\,x_4x_1-{x_2}^2-2\,x_4x_2-2\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ32◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & -5 & -6 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 6 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2,-1,-1,-1,1)$ и $(-14,-5,4,4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ32◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 < 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ33◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (2,1,0,0)$, $u_3 = (-4,6,1,0)$, $u_4 = (-20,-4,-4,0)$, $u_5 = (5,7,3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,1,1,-5)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ33◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ33◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 2\,x_2x_1 + 2\,{x_2}^2 - 2\,x_3x_2 - 4\,x_4x_2 + 2\,{x_3}^2 + 7\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ33◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 - 6\,x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-3,-5,-1,0,1)$ и $(15,11,4,0,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ33◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 < 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ34◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (-5,-4,1,0)$, $u_4 = (4,3,-1,0)$, $u_5 = (14,4,0,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,2,2,-4)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ34◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ34◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2\,x_2x_1 - 4\,x_3x_1 + 4\,x_4x_1 + 2\,{x_2}^2 + 8\,x_3x_2 - 6\,x_4x_2 + 7\,{x_3}^2 - 14\,x_4x_3 + 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ34◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 - 2\,x_3 + 7\,x_4 + 14\,x_5 = 0 \\ x_3 - 2\,x_4 - 4\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(20,-3,-4,1,1)$ и $(-50,3,16,-4,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ34◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0,\ \Delta_3 = 0,\ \Delta_4 < 0,\ \Delta_5 = 0,\ \Delta_6 < 0,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ35◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-2,1,0,0)$, $u_3 = (-1,-1,1,0)$, $u_4 = (3,-3,1,0)$, $u_5 = (13,3,3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,-2,-4,-3)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ35◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ35◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 + 4\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 - 4\,x_4x_1 + 3\,{x_2}^2 + 6\,x_3x_2 - 12\,x_4x_2 + 2\,{x_3}^2 - 14\,x_4x_3 - 2\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ35◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & -6 & 5 \\ 2 & -3 & -6 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 6\,x_3 - 9\,x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(9,-3,1,5,-1)$ и $(36,0,5,10,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ35◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 < 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ36◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-2,1,0,0)$, $u_3 = (2,8,1,0)$, $u_4 = (19,-13,-4,0)$, $u_5 = (18,-15,-4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,-1,-3,-2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ36◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ36◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 - 2\,x_3x_1 + 2\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 - 8\,x_4x_2 + 6\,{x_3}^2 + 10\,x_4x_3 + 8\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ36◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -9 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_3 - 4\,x_4 - 9\,x_5 = 0 \\ x_3 + 2\,x_4 + 4\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-5,1,4,2,1)$ и $(32,-13,-16,-8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ36◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ37◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (-6,6,1,0)$, $u_4 = (10,-6,-4,0)$, $u_5 = (15,-7,-3,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,0,-2,-1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ37◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2 & 1/4\sqrt{3} & -3/4 \\ -1/2\sqrt{3} & 1/4 & -1/4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ37◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 + 2\,x_4x_1 + 5\,{x_2}^2 - 4\,x_3x_2 - 2\,x_4x_2 + 7\,{x_3}^2 + 4\,x_4x_3 - 3\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ37◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2\,x_4 - 6\,x_5 = 0 \\ \quad\quad x_3 + 2\,x_4 - 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2,-3,-3,-2,1)$ и $(20,3,12,8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ37◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ38◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-5,1,0,0)$, $u_3 = (-16,2,1,0)$, $u_4 = (3,1,-1,0)$, $u_5 = (0,4,-2,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (1,1,-1,0)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ38◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ -1/2 & 1/4\sqrt{3} & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 1/4 & 1/4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ38◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 4\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 + 4\,x_4x_1 + 3\,{x_2}^2 - 10\,x_3x_2 - 12\,x_4x_2 + 2\,{x_3}^2 + 4\,x_4x_3 - {x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ38◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 - 2\,x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5,1,-3,2,1)$ и $(10,-13,12,-8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ38◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ39◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (-1,1,0,0)$, $u_3 = (3,-5,1,0)$, $u_4 = (7,4,-1,0)$, $u_5 = (-19,-16,4,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (-1,2,0,1)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ39◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ39◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы ${x_1}^2 - 2\,x_2x_1 + 4\,x_3x_1 + 2\,x_4x_1 + 2\,{x_2}^2 - 8\,x_3x_2 - 4\,x_4x_2 + 9\,{x_3}^2 + 12\,x_4x_3 + 5\,{x_4}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ39◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + 2\,x_5 = 0 \\ x_3 - 2\,x_4 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-5,0,-6,2,-1)$ и $(-19,-15,0,-5,-5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ39◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ40◇1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (3,1,0,0)$, $u_3 = (-3,1,1,0)$, $u_4 = (-23,5,4,0)$, $u_5 = (1,3,1,0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ вектор u, ближайший к вектору $v = (0,-2,1,2)$, и определите угол и расстояние между u и v.

ОГ40◇2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ40◇3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ к ортогональному базису квадратичной формы $x_1{}^2+4\,x_3x_1+x_2{}^2+2\,x_3x_2+4\,x_4x_2+4\,x_3{}^2+6\,x_4x_3+2\,x_4{}^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ40◇4. Симметричная билинейная форма β на $\mathbb{R}^5$ имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & -7 & 7 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 + 4\,x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7,1,1,2,1)$ и $(-25,-13,-4,-8,-4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ40◇5. Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 > 0\ ?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?