РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ УСТНОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ НА ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА 1. Может ли центральная проекция куба из какой-нибудь точки пространства на какую-нибудь плоскость оказаться пятиугольником? Приведите пример такой проекции или докажите, что её не существует.

ОТВЕТ: да, может.

РЕШЕНИЕ. Обозначим вершины куба буквами $ABCDA'B'C'D'$ (см. рис. 1). Тогда требуемым свойством обладает проекция π на плоскость грани $AA'B'B$ из точки O, центрально симметричной середине ребра AB относительно вершины D:

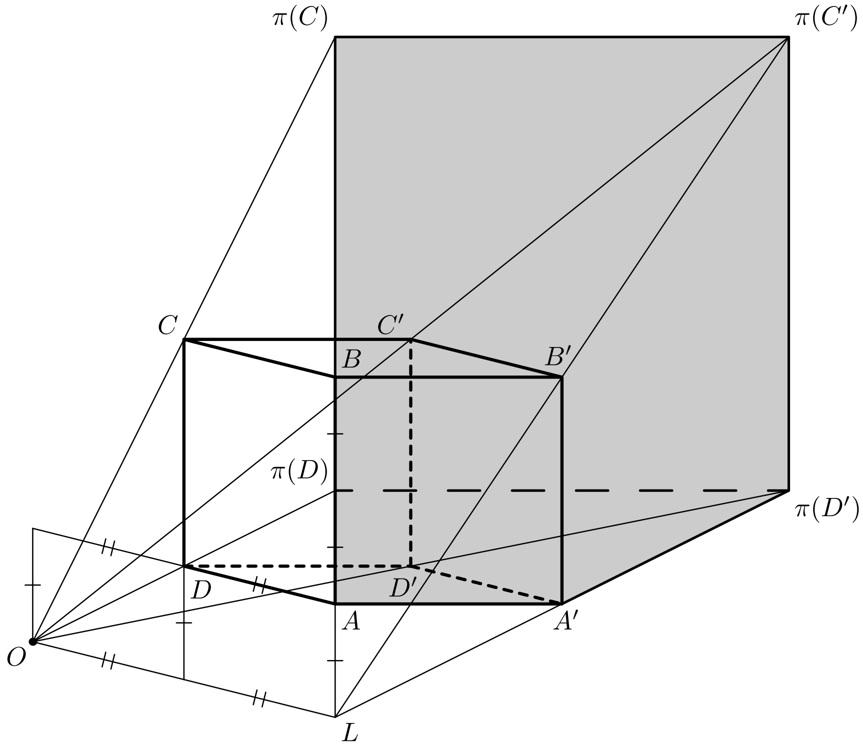

Рис. 1. Решение задачи 1.

(отрезок AL равен половине ребра куба, прямая OL есть линия пересечения плоскости грани $ABCD$ с плоскостью $OB'C'$).

ЗАДАЧА 2. Есть ли общий корень у многочленов

$$9\,x^4 + 9\,x^3 + 17\,x^2 - x - 2 \qquad \text{и} \qquad 6\,x^3 + x^2 + 11\,x - 4\ ?$$

ОТВЕТ: да, есть; например, $x = 1/3$.

РЕШЕНИЕ. Безотказно работающий способ отыскания общих корней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ основан на таком соображении: если $f(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)\ , \tag{1}$$

где $h(x)$ и $r(x)$ — некоторые многочлены, то любой общий корень α многочленов f и g будет одновременно общим корнем и для многочленов g и r, а также наоборот, любой общий корень многочленов g и r будет одновременно общим корнем и для многочленов f и g (чтобы убедиться в этом достаточно подставить в равенство (1) $x = \alpha$). Применим это соображение к многочленам $f(x) = 9\,x^4 + 9\,x^3 + 17\,x^2 - x - 2$ и $g(x) = 6\,x^3 + x^2 + 11\,x - 4$. Деля f на g с остатком, получаем равенство $f(x) = \left(\frac{3}{2}\,x + \frac{4}{5}\right) \cdot g(x) + r(x)$, где остаток

$$r(x) = -\frac{1}{4}\left(3\,x^2 + 35\,x - 12\right) = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 12)$$

(дискриминант квадратного уравнения $3\,x^2 + 35\,x - 12 = 0$ равен $35^2 + 12^2 = 37^2$). Подставляя $x = 1/3$ в $g(x)$ убеждаемся, что $1/3$ является общим корнем для r и g, а значит — общим корнем для f и g.

ЗАДАЧА 3. Можно ли в выражении

$$\begin{cases} 0 \underset{1}{\vee} \sin(x) \\ 0 \underset{2}{\vee} \sin(x/3) \\ 0 \underset{3}{\vee} \sin(x/7) \\ 0 \underset{4}{\vee} \sin(x/43) \\ 0 \underset{5}{\vee} \sin(x/2008) \end{cases}$$

заменить символы $\underset{1}{\vee}, \underset{2}{\vee}, \ldots, \underset{5}{\vee}$ знаками строгих неравенств так, чтобы у полученной системы не было решений?

ОТВЕТ: нет, нельзя; правые части могут иметь любые наперёд заданные знаки.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену переменного, положив $x = \pi t$. Ясно, что разрешимость полученной в результате системы неравенств на t равносильна разрешимости исходной системы неравенств на x. Функция $y = \sin(\pi t/N)$, где N — фиксированное целое число, периодическая с целым периодом $2N$. Она принимает положительные значения на всех интервалах вида $(2k \cdot N, (2k+1) \cdot N)$, а отрицательные значения — на всех интервалах вида $((2k-1) \cdot N, 2k \cdot N)$, где k — произвольное целое число.

Таким образом, на отрезке $[0,\,6]$ можно найти значения t, при которых $\sin(\pi t)$ и $\sin(\pi t/3)$ отличны от нуля и имеют любые наперёд заданные знаки:

значение t:	0		1		2		3		4		5		6
знак $\sin(\pi t)$:	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0
знак $\sin(\pi t/3)$:	0	+	+	+	+	+	0	–	–	–	–	–	0

и эта картина будет далее повторяться на всех отрезках вида $[6k,\,6(k+1)]$. Поскольку $\sin(\pi t/7)$ положителен при $t \in (0, 6]$ и отрицателен при $t \in [36,\,42) = [6 \cdot 6,\,6 \cdot 7) \subset (5 \cdot 7,\,6 \cdot 7)$, на отрезке $[0,\,42]$ можно найти t, при которых $\sin(\pi t)$, $\sin(\pi t/3)$ и $\sin(\pi t/7)$ отличны от нуля и имеют любые наперёд заданные знаки, причём эта картина будет далее повторяться на всех отрезках вида $[42\,k,\,42\,(k+1)]$. По той же причине на $[0,\,42 \cdot 43]$ имеются t, при которых $\sin(\pi t)$, $\sin(\pi t/3)$, $\sin(\pi t/7)$ и $\sin(\pi t/43)$ отличны от нуля и имеют любые наперёд заданные знаки, а на отрезке $[0,\,42 \cdot 43 \cdot 2008]$ имеются t, в которых достигаются любые сочетания знаков у $\sin(\pi t)$, $\sin(\pi t/3)$, $\sin(\pi t/7)$, $\sin(\pi t/43)$ и $\sin(\pi t/2008)$. Таким образом, правые части неравенств из условия задачи могут иметь любые наперёд заданные знаки.

ЗАДАЧА 4. Через данную точку, лежащую вне круга, ограниченного данной окружностью, проводят всевозможные прямые ℓ, пересекающие эту окружность в паре различных точек. Если касательные, восстановленные к окружности в этих точках, пересекаются, то точку их пересечения обозначают $P(\ell)$. Опишите множество всех точек $P(\ell)$.

ОТВЕТ: обозначим данную точку через Q, опустим из неё на данную окружность две касательных и обозначим через C и D точки их касания с окружностью; точки $P(\ell)$ заметают два открытых луча, остающиеся от прямой CD после выкидывания из неё отрезка CD (см. рис. 2).

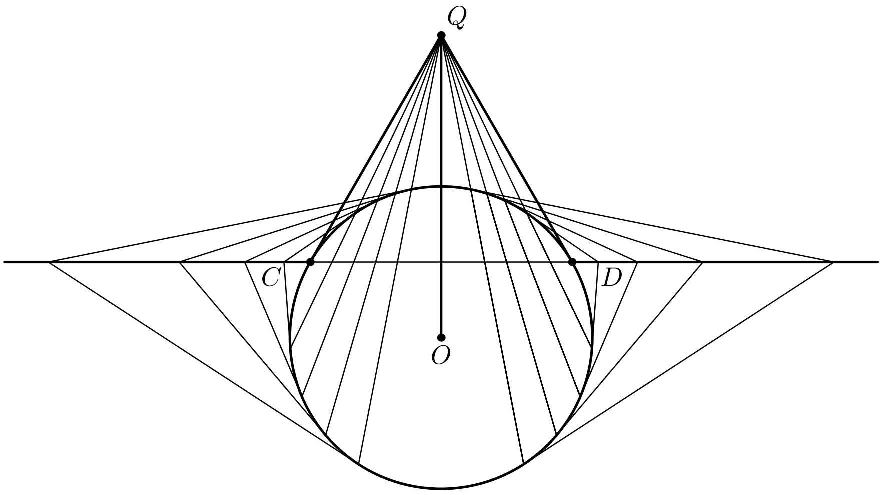

Рис. 2. Ответ к задаче 4.

РЕШЕНИЕ. Напомним, что касательные к окружности, проведённые через концы произвольной отличной от диаметра хорды EF (см. рис. 3), пересекаются на срединном перпендикуляре к этой хорде в точке T, такой что $OS \cdot OT = r^2$, где S — середина хорды, O — центр окружности, а $r = OE = OF$ — радиус[1].

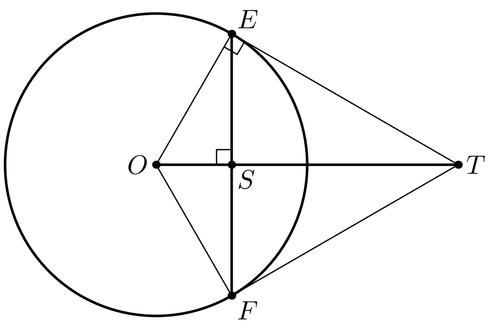

Рис. 3. $OS \cdot OT = r^2$.

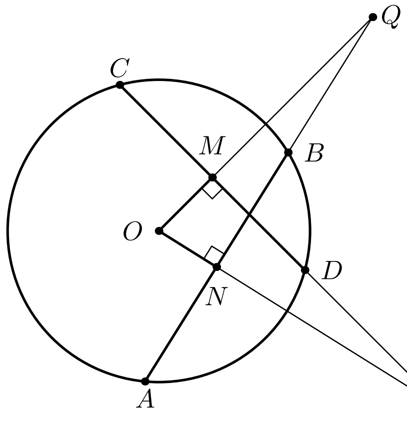

Рис. 4. $ON \cdot OP = OM \cdot OQ$.

Далее, если из центра окружности опущены срединные перпендикуляры ON и OM на две не перпендикулярные друг дуг хорды AB и CD (см рис. 4), и каждый из них продолжен до

[1]первое следует из того, что симметрия относительно срединного перпендикуляра к хорде переводит и окружность и хорду в себя, а значит переводит друг в друга касательные, проходящие через концы хорды, а потому оставляет на месте точку их пересечения, которая, тем самым, должна лежать на оси симметрии; второе получается из подобия прямоугольных треугольников OSE и OET (по трём углам), дающего пропорцию $OS : OE = OE : OT$

пересечения с продолжением другой хорды в точке P и Q соответственно, то мы получим равные произведения $ON \cdot OP = OM \cdot OQ$, поскольку подобие прямоугольных треугольников ONQ и OMP (по трём углам) даёт пропорцию $ON : OQ = OM : OP$.

Вернёмся теперь к нашей задаче. Пусть касательные, опущенные из данной точки Q на окружность, пересекают её в точках C и D (см. рис. 5). Проведём через Q прямую $\ell = AB$, пересекающую окружность в точках A и B. Из предыдущих замечаний вытекает, что срединный перпендикуляр ON к хорде AB пересекает прямую CD в точке P, для которой $ON \cdot OP = OM \cdot OQ = r^2$. Поэтому эта точка P совпадает с точкой $P(\ell)$ пересечения касательных, проходящих через A и B. Этим доказано, что все точки $P(\ell)$ лежат на прямой CD вне отрезка $[CD]$.

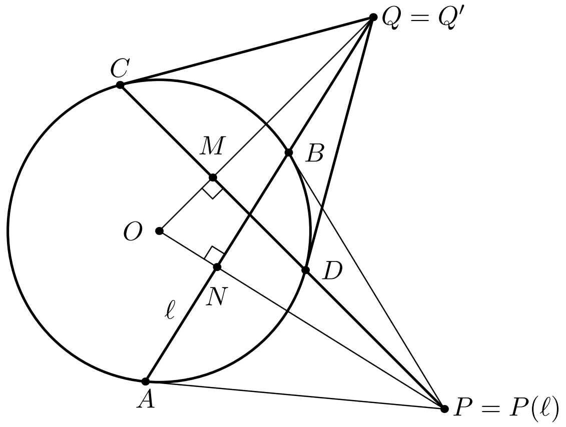

Рис. 5. Решение задачи 4.

Наоборот, если мы возьмём на на прямой CD произвольную точку P вне отрезка $[CD]$, опустим из неё касательные к окружности и обозначим точки касания через A и B (мы будем использовать тот же самый рис. 5), то прямая AB пересечётся со срединным перпендикуляром к хорде CD в точке Q', для которой $OM \cdot OQ' = ON \cdot OP = r^2$. Поэтому эта точка Q' является точкой пересечения касательных к окружности, восстановленных в точках C и D, а значит, совпадает с данной в условии задачи точкой Q. Этим доказано, что всякая точка P на прямой CD вне отрезка $[CD]$ является точкой $P(\ell)$ для прямой $\ell = AB$, проходящей через Q.

ЗАДАЧА 5. Найдите все основания, для которых существует действительное число, равное своему логарифму по этому основанию.

ОТВЕТ: основание может быть любым числом из объединения промежутков $(0, 1) \cup (1, e^{1/e}]$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим основание через a. Задача состоит в том, чтобы описать все a для которых уравнение $\log_a(x) = x$ имеет действительное решение. Согласно школьному определению логарифма числа a и x должны удовлетворять условиям $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Далее мы рассматриваем только такие a и x. Укажем два подхода к решению этой задачи.

Первый способ.

Перепишем уравнение $\log_a(x) = x$ в виде $\frac{\ln x}{\ln a} = x$, или $\ln(a) = \frac{\ln x}{x}$. Таким образом, решением задачи является множество всех чисел a, таких что $\ln(a)$ принадлежит множеству значений функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, и нам остаётся лишь явно описать это множество значений.

Функция $f = \frac{\ln x}{x}$ определена для всех $x > 0$, отрицательна при $0 < x < 1$, обращается в нуль при $x = 1$, положительна при $x > 1$ и всюду дифференцируема. Её производная $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ положительна при $0 < x < e$, обращается в нуль при $x = e$ и отрицательна при $x > e$. Таким образом, $f(x)$ монотонно возрастает при $0 < x < e$, достигая при $x = e$ абсолютного максимума $f(e) = 1/e$, и монотонно убывает при $x > e$.

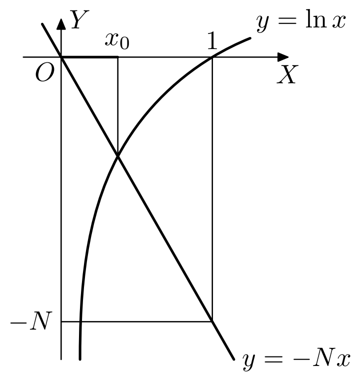

Рис. 6.

Покажем, что на интервале $(0, 1)$ функция f не ограничена снизу, т.е. для любого сколь угодно большого положительного числа N найдётся $x \in (0, 1)$, для которого выполняется неравенство $\frac{\ln x}{x} < -N$. Для этого перепишем это неравенство в виде $\ln x < -Nx$ и заметим, что на промежутке $(0, 1)$ левая часть монотонно возрастает от $-\infty$ до 0, а правая — монотонно убывает от 0 до $-N$ (см. рис. 6). Поскольку обе функции непрерывны, их графики пересекутся при некотором $x = x_0$, и требуемое неравенство будет выполнено при $0 < x < x_0$.

Итак, мы убедились, что f монотонно возрастает от $-\infty$ до $1/e$ при $0 < x \leqslant e$, и далее, при $x > e$, монотонно убывает, как на рис. 7. Тем самым, множество значений функции f — это промежуток $(-\infty, 1/e)$, а значит $-\infty < \ln a \leqslant 1/e$, и $0 < a \leqslant e^{1/e}$.

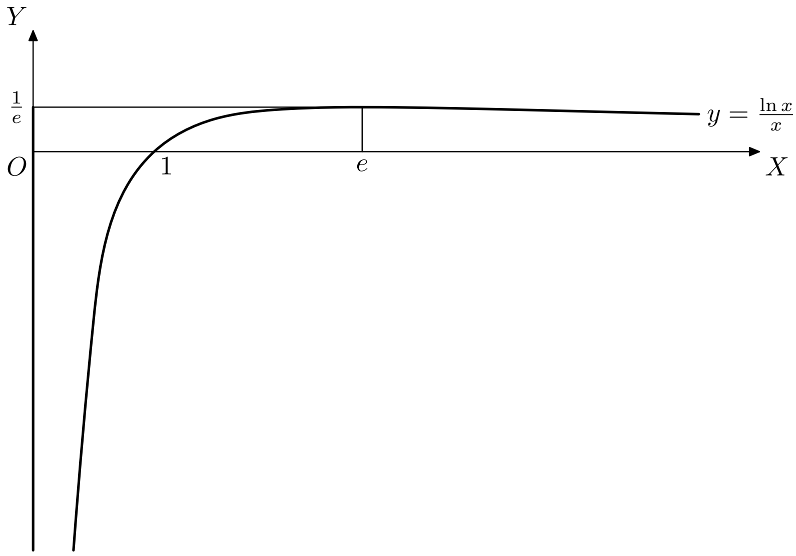

Рис. 7. График функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Второй способ.
При $0 < a < 1$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$ функция $y = \log_a(x)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, а функция $y = x$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ (см. рис. 8). Поскольку обе функции непрерывны, их графики пересекаются, т. е. при любом $0 < a < 1$ уравнение $\log_a(x) = x$ имеет решение.

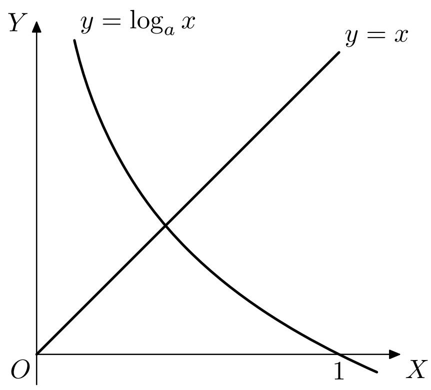

Рис. 8. Случай $0 < a < 1$.

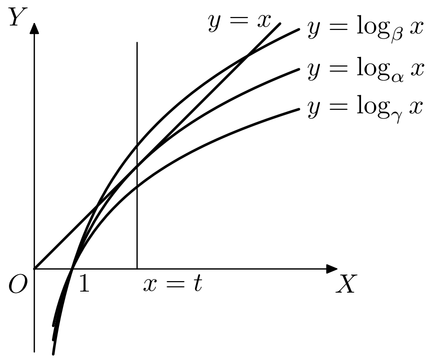

Рис. 9. Случай $a > 1$.

Пусть теперь $a > 1$. При $1 < \beta < \alpha < \gamma$ график функции $y = \log_\beta(x)$ в области $1 < x < +\infty$ лежит строго выше графика функции $y = \log_\alpha(x)$, а график функции $y = \log_\gamma(x)$ лежит строго ниже графика функции $y = \log_\alpha(x)$ (см. рис. 9). Поэтому, если мы найдём такое значение $a = \alpha$, для которого график функции $y = \log_\alpha(x)$ касается прямой $y = x$, как на рис. 9, уравнение $\log_a(x) = x$ будет иметь решение для любых $1 < a \leqslant \alpha$ и не будет иметь решений для любых $a > \alpha$ (здесь мы пользуемся тем, что график функции $y = \log_\alpha(x)$ является выпуклым вверх и вне точки касания лежит строго *под* касательной).

Тангенс угла наклона касательной к графику $y = \log_\alpha(x)$ при $x = t$ равен $y'(t) = 1/(t \ln \alpha)$. Условие касания этого графика с прямой $y = x$ в точке с абсциссой $x = t$ записывается системой уравнений

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{t \ln \alpha} \\ t = \log_\alpha(t) \ . \end{cases}$$

Из первого уравнения $t = 1/\ln \alpha = \log_\alpha e$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $\log_\alpha e = \log_\alpha \log_\alpha e$, откуда $e = \log_\alpha e$. Заменяя основание логарифма натуральным, получаем $e = 1/\ln \alpha$, а значит, $\ln \alpha = 1/e$, и $\alpha = e^{1/e}$.