

ДЕМОНСТРАЦИОННАЯ ВЕРСИЯ  
УСТНОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ  
НА ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА 1. Может ли центральная проекция куба из какой-нибудь точки пространства на какую-нибудь плоскость оказаться пятиугольником? Приведите пример такой проекции или докажите, что её не существует.

(ответ: да, может; например, такова проекция куба  $ABCD A'B'C'D'$  на плоскость грани  $AA'B'B$  из точки, центрально симметричной середине ребра  $AB$  относительно вершины  $D$ )

ЗАДАЧА 2. Есть ли общий корень у многочленов

$$9x^4 + 9x^3 + 17x^2 - x - 2 \quad \text{и} \quad 6x^3 + x^2 + 11x - 4 ?$$

(ответ: да, есть; скажем,  $x = 1/3$ )

ЗАДАЧА 3. Можно ли в выражении

$$\begin{cases} 0 \underset{1}{\vee} \sin(x) \\ 0 \underset{2}{\vee} \sin(x/3) \\ 0 \underset{3}{\vee} \sin(x/7) \\ 0 \underset{4}{\vee} \sin(x/43) \\ 0 \underset{5}{\vee} \sin(x/2008) \end{cases}$$

заменить символы  $\underset{1}{\vee}$ ,  $\underset{2}{\vee}$ , ...,  $\underset{5}{\vee}$  знаками строгих неравенств так, чтобы у полученной системы не было решений?

(ответ: нет, правые части могут быть любых наперёд заданных знаков)

ЗАДАЧА 4. Через данную точку, лежащую вне круга, ограниченного данной окружностью, проводят всевозможные прямые  $\ell$ , пересекающие эту окружность в паре различных точек. Если касательные, восстановленные к окружности в этих точках, пересекаются, то точку их пересечения обозначают  $P(\ell)$ . Опишите множество всех точек  $P(\ell)$ .

(ответ: опустим из данной точки на данную окружность две касательных и соединим точки касания прямой; искомое множество есть эта прямая без отрезка с концами в точках касания)

ЗАДАЧА 5. Найдите все основания, для которых существует действительное число, равное своему логарифму по этому основанию.

(ответ: основание может быть любым числом из  $(0, 1) \cup (1, e^{1/e}]$ )