9. НАКРЫТИЯ.

Задача 1. Докажите, что следующие отображения $p : E \to B$ — накрытия, и опишите соответстветствующие гомоморфизмы $p_* : \pi_1(E) \to \pi_1(B)$ фундаментальных групп: а) $E = B \stackrel{\text{def}}{=} S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, а $p(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^n$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. б) $E = B = \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а p задано той же формулой, что и в пункте 1а. в) $E = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}^*$, $p(z) = \exp z$. г) Покажите, что отображение $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное формулой пункта 1а, где $n \geq 0$, накрытием при $n \neq 1$ не является.

Задача 2. а) Пусть $p : E \to B$ — накрытие; его сечением называется непрерывное отображение $s : B \to E$ такое, что $p \circ s = \mathrm{id}_B$ (иными словами, $s(b) \in p^{-1}(b)$ для всех $b \in B$). Докажите, что если E линейно связно, а накрытие нетривиально (не является гомеоморфмзмом), то сечения не существует. б) Докажите, что не существует "комплексного арифметического корня" — непрерывного отображения $\sqrt{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющего при всех $z \in \mathbb{C}$ равенству $\left(\sqrt{z}\right)^2 = z$. в) Докажите, что не существует (однозначного) комплексного логарифма — непрерывного отображения $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, удовлетворяющего при всех $z \in \mathbb{C}^*$ равенству $\exp(\log z) = z$.

Указание (к задаче 2а)**.** Пусть существует; рассмотрите отображения фундаментальных групп $p_* : \pi_1(E) \to \pi_1(B)$ и $s_* : \pi_1(B) \to \pi_1(E)$.

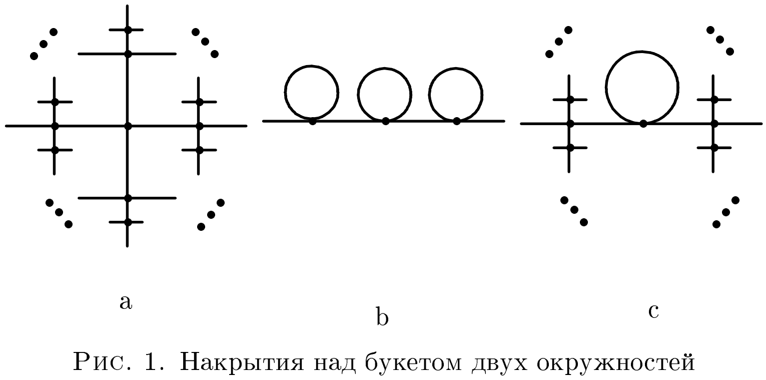
Задача 3. Докажите, что отображение $p : E \to B$ является накрытием. Вычислите фундаментальные группы $\pi_1(E)$ и $\pi_1(B)$ и гомоморфизм $p_* : \pi_1(E) \to \pi_1(B)$. а) $E = S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, $B = \mathbb{R}P^n$, $p(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$. б) $E = \{(x, y, z) \in S^2 \mid -1/2 \leq z \leq 1/2\} \subset S^2$, p — ограничение на E отображения из пункта 3а (при $n = 2$), $B = p(E) \subset \mathbb{R}P^2$.

Свободной группой с k образующими $a_1, \dots, a_k$ называется множество конечных последовательностей ("слов"), состоящих из символов $a_1, a_1^{-1}, \dots, a_k, a_k^{-1}$, профакторизованное по следующему отношению эквивалентности: слово u эквивалентно слову v, если одно из другого можно получить, вписывая в произвольные места пары символов $a_i a_i^{-1}$ и $a_i^{-1} a_i$ (для всех $i = 1, \dots, k$) и вычеркивая такие пары. На множестве классов эквивалентности задается умножение: если p и q — два класса, а $u_1 \dots u_s$ и $v_1 \dots v_t$ — представляющие их слова, то pq — класс, содержащий слово $u_1 \dots u_s v_1 \dots v_t$.

Упражнение (для тех, кто раньше не имел дела со свободной группой; можно при недостатке времени использовать данные утверждения как факты без доказательства)**.** а) Докажите, что введенное отношение — действительно отношение эквивалентности. б) Докажите, что определение умножения корректно: класс pq не зависит от выбора слов — представителей классов p и q. в) Докажите, что свободная группа действительно является группой. г) Докажите, что свободная группа с одной образующей изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению. д) Пусть G — произвольная группа, и $g_1, \dots, g_n \in G$ — любые ее элементы. Докажите, что существует ровно один гомоморфизм f свободной группы с n образующими в G такой, что $f(a_i) = g_i, i = 1, \dots, n$. е) Докажите, что свободная группа с $k \geq 2$ образующими некоммутативна: $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$.

Напомним, что графом называется топологическое пространство, полученное из дизъюнктного объединения отрезков (ребер) склеиванием их концов; количество ребер может быть бесконечным (как в задаче ниже).

Задача 4. а) Пусть Γ_a — граф, изображенный на рис. 1a. Докажите, что граф Γ_a стягиваем (тождественное отображение Γ_a в себя гомотопно отображению, переводящему весь граф в точку). Выведите отсюда, что



a b c

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей группа $\pi_1(\Gamma_a)$ тривиальна. б) Постройте накрытие $p:\Gamma_a \to W_2$ над букетом W_2 из двух окружностей. Что представляет собой слой этого накрытия? в) Постройте действие R свободной группы с двумя образующими на графе Γ_a (т.е. набор гомеоморфизмов $R_v:\Gamma_a \to \Gamma_a$, где v — произвольный элемент свободной группы) такое, что $p \circ R_v = p$ для любого элемента v свободной группы. г) Докажите, используя результат пункта 4в, что $\pi_1(W_2)$ — свободная группа с 2 образующими; укажите эти образующие явно. д) Постройте накрытия $p_b:\Gamma_b \to W_2$ и $p_c:\Gamma_c \to W_2$, где Γ_b и Γ_c — графы, изображенные на рис. 1b и 1c соответственно. Опишите явно подгруппы $(p_b)_*(\pi_1(\Gamma_b))$ и $(p_c)_*(\pi_1(\Gamma_c))$ в группе $\mathcal{F}(a,b)=\pi_1(W_2)$. Нормальны ли они?

Указание. Прежде всего нужно формально описать графы Γ_a, Γ_b и Γ_c; так, в графе Γ_a вершины — элементы свободной группы с образующими a, b, а вершины v и w соединены ребром тогда и только тогда, когда $v = wa^{\pm 1}$ или $v = wb^{\pm 1}$. Это позволяет соединить любую точку $x \in \Gamma_a$ любого ребра с отмеченной вершиной (сооответствующей единице группы) выделенным “кратчайшим” путем $\gamma_x:[0,1] \to \Gamma_a$ — постройте!