8. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Теория

Непрерывные отображения $f_0 : X \to Y$ и $f_1 : X \to Y$ гомотопны (обозначение $f_0 \sim f_1$), если существует непрерывное отборажение $F : X \times [0,1] \to Y$ (гомотопия), для которого $F(x,0) = f_0(x)$ и $F(x,1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$. Топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$.

Задача 0. а) Докажите, что гомотопность отображений $X \to Y$ — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается $\mathrm{Hom}(X,Y)$. б) Докажите, что гомотопическая эквивалентность топологических пространств — отношение эквивалентности. в) Пусть $f_0, f_1 : X \to Y$ и $g_0, g_1 : Y \to Z$ — непрерывные отображения, причем $f_0 \sim f_1$ и $g_0 \sim g_1$. Докажите, что $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$. г) Пусть X_1 гомотопически эквивалентно Y_1, а X_2 гомотопически эквивалентно Y_2. Докажите, что между множествами $\mathrm{Hom}(X_1, Y_1)$ и $\mathrm{Hom}(X_2, Y_2)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Простые задачи

Задача 1. а) Докажите, что два отображения $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда их степени равны. б) Докажите, что окружность не стягиваема (т.е. гомотопически не эквивалентна точке). в) Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения, $\deg f, \deg g \in \mathbb{Z}$ — их степени. Докажите, что $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

Задача 2. а) Докажите, что плоскость и полуплоскость (с границей) стягиваемы и, следовательно, гомотопически эквивалентны друг другу. б) Докажите, что плоскость без точки и полуплоскость без внутренней точки гомотопически эквивалентны окружности. в) Докажите, что полуплоскость без граничной точки стягиваема. г) Докажите, что плоскость и полуплоскость не гомеоморфны. д) Докажите, что при гомеоморфизме полуплоскости в себя граничные точки переходят в граничные, а внутренние — во внутренние.

Конечным графом называется топологическое пространство, полученное из конечного дизъюнктного объединения отрезков склеиванием их концов. Образы отрезков при отображении склейки называются ребрами графа, а образы их концов — вершинами. Если два конца ребра совпадают (концы соответствующего отрезка склеены), то ребро называется петлей.

Задача 3. а) Докажите, что конечный граф компактен и связный конечный граф линейно связен. б) Пусть G — конечный граф, а e — его ребро, соединяющее вершины a и b. Обозначим G/e пространство, полученное стягиванием ребра e (все его точки отождествляются). Докажите, что G/e гомеоморфно конечному графу, и опишите этот граф. этот граф. в) Пусть e — ребро графа G, соединяющее вершины a и $b \neq a$ (т.е. не являющееся петлей). Пусть $f : G \to G/e$ — стандартное отображение в фактор-пространство, а $g : G/e \to G$ — непрерывное отображение, переводящее вершину $c \overset{\mathrm{def}}{=} f(a) = f(b)$ графа G/e в середину ребра e, а остальные вершины — сами в себя. Если ℓ — ребро графа G, соединяющее вершину a с вершиной $v \neq a, b$, а $m = f(\ell)$ — соответствующее ребро графа G/e с концом в вершине c, то g монотонно отображает m на объединение ребра ℓ и соответствующей половины ребра e; аналогично для ребер, соединяющих вершину v с вершиной b. Если ℓ — ребро G, концы которого отличны от a и b, и $m = f(\ell)$, то на ребре m отображение g — тождественное. Докажите, что пара отображений f, g — гомотопическая эквивалентность. г) Докажите, что линейно связный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Сколько окружностей в букете, если в графе n вершин и m ребер?

Указание. В описании отображения g в задаче 3в не разобраны случаи, когда $m = f(\ell)$, где ℓ — петля в вершине a, петля в вершине b или соединяет вершины a и b (но $\ell \neq e$). Опишите поведение отображения g на таких ребрах самостоятельно.

Задача 4. Пусть V_n — букет n окружностей, $p_k : S^1 \to V_n$ — отображение, гомеоморфно переводящее S^1 в k-ю окружность букета ($1 \le k \le n$), а $q_\ell : V_n \to S^1$ — отображение, гомеоморфно переводящее ℓ-ю окружность букета в $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, причем вершина букета переходит в точку $(1,0) \in S^1$, и все точки всех остальных окружностей букета тоже переходят в $(1,0)$ (здесь тоже $1 \le \ell \le n$). а) Вычислите степень отображения $q_\ell \circ p_k : S^1 \to S^1$ для всех k и ℓ. б) Докажите, что отображения p_k и q_ℓ не гомотопны отображениям в точку. в) Докажите, что если $k \neq \ell$, то $q_\ell \circ p_k$ гомотопно отображению в точку. г) Докажите, что если $f, g : S^1 \to S^1$ — отображения, не гомотопные отображениям в точку, то

$f \circ g$ также не гомотопно отображению в точку. Выведите отсюда, что букет V_n при $n > 1$ гомотопически не эквивалентен окружности.

Задачи посложнее

Задача 4, продолжение. д) Докажите, что отображение $f : S^1 \to V_n$ гомотопно отображению в точку тогда и только тогда, когда все отображения $q_i \circ f : S^1 \to S^1$, $1 \leq i \leq n$, гомотопны отображению в точку. е) Пусть $k < n$ и $\varrho_1, \ldots, \varrho_k : V_n \to S^1$ — произвольные отображения. Докажите, что существует отображение $f : S^1 \to V_n$, не гомотопное отображению в точку и такое, что все отображения $\varrho_i \circ f : S^1 \to S^1$, $1 \leq i \leq k$, гомотопны отображению в точку. ж) Докажите, используя утверждения 4д и 4е, что букеты окружностей V_{n_1} и V_{n_2} при $n_1 \neq n_2$ гомотопически не эквивалентны друг другу.

Указание. В задаче 4д рассмотрите отображения $f_i : S^1 \to V_n$, где $f_i(x) = f(x)$, если $f_i(x)$ принадлежит i-ой окружности букета, а в остальных случаях $f_i(x)$ — вершина букета. Очевидно, $q_i \circ f_i = q_i \circ f$; докажите, что f гомотопно отображению в точку тогда и только тогда, когда все f_i, $1 \leq i \leq n$, гомотопны отображению в точку. В задаче 4е рассмотрите в качестве f отображение $p_1^{u_1} \ldots p_n^{u_n}$ с произвольными целыми $u_1, \ldots, u_n$.

Сферой с g ручками называется топологическое пространство, полученное из правильного $4g$-угольника $a_1 a_2 \ldots a_{4g}$ попарным отождествлением сторон, причем точка $x \in [a_{4i}, a_{4i+1}]$, лежащая на расстоянии t от вершины a_{4i}, склеивается с точкой $y \in [a_{4i+2}, a_{4i+3}]$, лежащей на расстоянии t от вершины a_{4i+2}; аналогично для сторон $[a_{4i+1}, a_{4i+2}]$ и $[a_{4i+3}, a_{4i+4}]$ (для всех t и всех i; сложение в индексах по модулю $4g$).

Задача 5. а) Докажите, что сфера с g ручками — двумерное топологическое многообразие: каждая точка сферы с g ручками обладает окрестностью, гомеоморфной открытому кругу. б) Докажите, что если M_g — сфера с g ручками и $x \in M_g$, то $M_g \setminus \{x\}$ гомотопически эквивалентна букету $2g$ окружностей. Выведите отсюда (и из задачи 4ж), что M_{g_1} и M_{g_2} при $g_1 \neq g_2$ не гомеоморфны друг другу. в) Докажите, что сфера с g ручками гомеоморфна пространству, полученному склеиванием сферы с $(g-1)$ ручками и круглой дыркой и тора с дыркой (собственно, “ручки”) по границам дырок.