# 7. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ (ПРИЛОЖЕНИЯ)

Продолжение списка 6, обозначения те же.

## Основная теорема алгебры

*Основная теорема алгебры* утверждает, что всякий комплексный многочлен $A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ($n > 0$) имеет комплексный корень. Докажем ее от противного. Пусть $r \ge 0$, и $\mu_A(r) \in \mathbb{Z}$ — вращение векторного поля $A$ на кривой $\gamma_r(t) = r\exp(2\pi i t)$, то есть $\gamma_r(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$. Если основная теорема алгебры неверна для многочлена $A$, то $\mu_A(r)$ определено для всех $r > 0$.

**Задача 1** (основная теорема алгебры)**.** а) Найдите $\mu_{Q_n}(r)$, где $Q_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda z^n$, $\lambda \ne 0$. б) Докажите, что $\mu_A(r) = \mu_A(0) = 0$. в) Докажите, что если $r > 0$ достаточно велико, то отображение $f_{A,r} : S^1 \to S^1$, заданное формулой $f_{A,r}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A(rz)}{|A(rz)|}$ гомотопно отображению $f_{Q_n,r} : S^1 \to S^1$, заданному аналогичной формулой. г) Приведите результаты задач 1а, 1б и 1в к противоречию и докажите основную теорему алгебры.

**Указание** (к задаче 1в)**.** Рассмотрите семейство отображений $f_{(1-t)A+tQ_n,r}$; при каких $r$ это гомотопия?

## Теорема Брауэра в размерности 2

Пусть $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ — круг, а $F : \Omega \to \Omega$ — непрерывное отображение. Теорема Брауэра утверждает, что $F$ имеет неподвижную точку: $\exists v_* \in \Omega : F(v_*) = v_*$. Докажем теорему Брауэра от противного. Пусть $0 \le r \le 1$, а $\mu_r$ — вращение векторного поля $\Phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} F(v) - v$ (напомним, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, так что $F(v) \in \mathbb{R}^2$ и разность векторов определена!) на кривой $\gamma_r(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$. Если теорема Брауэра неверна, то $\mu_r$ определено при всех $0 \le r \le 1$.

**Задача 2** (теорема Брауэра)**.** а) Докажите, что $\mu_0 = 0$. б) Докажите, что отображение $f_\Phi : S^1 \to S^1$, заданное равенством $f(v) = \frac{\Phi(v)}{|\Phi(v)|}$ (напомним, что $S^1 \subset \Omega$, точнее, является его границей!), гомотопно отображению $f_0 : S^1 \to S^1$, заданному равенством $f_0(v) = -v$. в) Докажите, что $\deg f_0 = 1$ и выведите отсюда противоречие, доказывающее теорему Брауэра.

## Задача о пересечении

Пусть $u, v : [0, 1] \to [0, 1]^2$ — два непрерывных отображения (непрерывные кривые в квадрате), причем $u(0) = (0, 0)$, $u(1) = (1, 1)$, $v(0) = (0, 1)$, $v(1) = (1, 0)$. Докажем, что кривые $u$ и $v$ пересекаются — существуют $t, s \in [0, 1]$ такие, что $u(t) = v(s)$. Предположим, что это не так; тогда можно определить отображение $F : [0, 1]^2 \to S^1$ формулой $F(t, s) = (u(t) - v(s))/\,|u(t) - v(s)|$. Пусть $0 \le r \le 1$, и $Q_r \subset [0, 1]^2$ — граница квадрата с центром в точке $(1/2, 1/2)$ и сторонами длины $r$, параллельными осям координат. Обозначим через $h_r$ стандартный гомеоморфизм окружности $S^1$ на $Q_r$ и рассмотрим отображение $f_r = F \circ h_r : S^1 \to S^1$.

**Задача 3.** а) Докажите, что $\deg f_0 = 0$. б) Докажите, что $f_1$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$. в) Приведите результаты задач 3а и 3б к противоречию, доказав тем самым, что кривые $u$ и $v$ пересекаются. г) Из города $A$ в город $B$ ведут две дороги. Две повозки, связанные веревкой длиной 10 м, смогли проехать из $A$ в $B$, одна по первой дороге, другая по второй. Докажите, что два круглых воза диаметром 10 м, одновременно выехавшие из $A$ и из $B$ навстречу друг другу по двум разным дорогам, разъехаться не смогут.

**Указание** (к задаче 3б)**.** Нужную гомотопию следует делать по отдельности для ограничения $F$ на стороны квадрата.

## Степень гладкого отображения

Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется гладкой, если она имеет непрерывную производную любого порядка. Число $c \in \mathbb{R}$ называется регулярным значением гладкой функции $F$, если из того, что $F(x) = c$ вытекает, что $F'(x) \ne 0$.

**Задача 4.** Пусть $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $c \in \mathbb{R}$ — ее регулярное значение. а) Докажите, что каждая точка множества $F^{-1}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [0, 1] \mid F(x) = c\}$ изолирована, а само множество конечно. б) Пусть $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Докажите, что число $\deg_c F \stackrel{\text{def}}{=} \#\{x \in [0, 1] \mid F(x) = c, F'(x) > 0\} - \#\{x \in [0, 1] \mid F(x) = c, F'(x) < 0\}$ равно 1, если $0 < c < 1$, и равно 0 при $c < 0$ или $c > 1$.

**Указание.** На самом деле, чтобы утверждения задачи 4 были верны, достаточно, чтобы $F$ имела непрерывную первую производную.

Непрерывное отображение $g : S^1 \to S^1$ называется гладким, если поднятие $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ отображения $g \circ p_1 : [0,1] \to S^1$ гладкое, причем $G'(0) = G'(1)$. Точка $c \in S^1$ называется регулярным значением отображения $g$, если $G'(t) \neq 0$ для всякого $t \in [0,1]$ такого, что $p(G(t)) = c$ (как обычно, $p : \mathbb{R} \to S^1$ — стандартная проекция, задаваемая формулой $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, а $p_1 : [0,1] \to S^1$ — ее ограничение на отрезок $[0,1]$).

**Задача 5.** а) Докажите, что гладкость $g$ и тот факт, что $c \in S^1$ — регулярное значение, не зависит от выбора поднятия $G$. б) Докажите, что каждая точка множества $\{t \in [0,1] \mid p(G(t)) = c\}$ изолирована, а само множество конечно. в) Докажите, что число $\deg_c g \stackrel{\text{def}}{=} \#\{t \in [0,1) \mid p(G(t)) = c, G'(t) > 0\} - \#\{t \in [0,1) \mid p(G(t)) = c, G'(t) < 0\}$ равно $\deg g$ (в частности, не зависит от выбора поднятия $G$ и регулярного значения $c$).