6. ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ

Во всех задачах этого семинара $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ — окружность, $p : \mathbb{R} \to S^1$ задано формулой $p(t) = \exp(2\pi i t) \in \mathbb{C}$ или $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{R}^2$. Непрерывное отображение $F : X \to \mathbb{R}$ (где X — любое топологическое пространство) называется поднятием отображения $f : X \to S^1$, если $f = p \circ F$. В лекциях доказывалось, что если $X \subset \mathbb{R}^m$ — множество, звездчатое относительно точки $a \in X$, и $b \in \mathbb{R}$ таково, что $p(b) = f(a)$, то у отображения f существует и единственно поднятие F такое, что $F(a) = b$.

Задача 0 (замечание)**.** Докажите, что если X — топологическое пространство, гомеоморфное шару в $\mathbb{R}^m$, то теорема о существовании и единственности поднятия верна для отображений $f : X \to S^1$.

Задача 1. а) Пусть $f : [0,1] \to S^1$ — непрерывное отображение, $F_1, F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ — два его поднятия. Докажите, что $F_2(t) - F_1(t) = const.$ и, следовательно, число $F_2(1) - F_2(0) = F_1(1) - F_1(0)$ зависит только от f (называется вращением отображения f). б) Для каких $x \in \mathbb{R}$ существует отображение $f : [0,1] \to S^1$, вращение которого равно x, а образ $f([0,1]) \neq S^1$?

Задача 2. а) Найдите вращение отображения $p_n : [0,1] \to S^1$, заданного формулой $p_n(t) = \exp(2\pi i n t)$ или $p_n(t) = (\cos 2\pi n t, \sin 2\pi n t)$. б) Докажите, что если $f(0) = f(1)$, то вращение отображения f — целое число.

Пусть $f : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение. Его степенью $\deg f$ называется вращение отображения $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} f \circ p_1 : [0,1] \to S^1$ (определение p_1 см. в задаче 2а). Согласно задаче 2б, $\deg f \in \mathbb{Z}$.

Задача 3 (гомотопия отображений окружности)**.** а) Пусть $F : S^1 \times [0,1] \to S^1$ — непрерывное отображение, а $f_s : S^1 \to S^1$ — отображение, заданное равенством $f_s(a) = F(a,s)$ $(a \in S^1, s \in [0,1]$. Докажите, что $\deg f_s$ не зависит от s. б) Докажите, что $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ является поднятием отображения $p_1 \circ f$, где $f : S^1 \to S^1$ непрерывно, тогда и только тогда, когда $F(1) - F(0) \in \mathbb{Z}$. в) Пусть $g_0, g_1 : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения, и $\deg g_0 = \deg g_1$. Докажите, что существует гомотопия g_s отображений окружности, соединяющая g_0 и g_1.

Указание (к пункту 3в)**.** Сначала разберите случай, когда $g_0(a_*) = g_1(a_*)$, где $a_* \in S^1$ — какая-нибудь отмеченная точка (например, $a_* = (1,0) \in \mathbb{R}^2$). Покажите, что в этом случае можно считать, что $G_0(0) = G_1(0)$, где $G_0, G_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ — поднятия отображений $g_0 \circ p_1$ и $g_1 \circ p_1$ соответственно. Потом сведите общий случай к этому.

Пусть $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (оно же плоское векторное поле), а $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (оно же плоская кривая) такая, что $P(\gamma(t)) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$. Вращением векторного поля P на кривой γ называется вращение отображения $f : [0,1] \to S^1$, заданного формулой $f(t) = \frac{P(\gamma(t))}{|P(\gamma(t))|}$.

Задача 4. Пусть $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Найдите вращение векторного поля $P(z) = z(z-1)(z^2+1)$ на кривой $\gamma(t) = z_0 + r\exp(2\pi i t)$, где а) $z_0 = 0$, $r = 1/2$, б) $z_0 = 1$, $r = 1/2$, в) $z_0 = 1/2$, $r = 1$, г) $z_0 = 0$, $r = 2$. д) Пусть $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — многочлены, причем $P(z) = (z - z_0)^n Q(z)$ $(n \geq 0)$. Пусть $r > 0$ таково, что $Q(z) \neq 0$ при $|z - z_0| \leq r$. Докажите, что вращение поля P на кривой $\gamma(t) = z_0 + r\exp(2\pi i t)$ равно n.