Факторпространства

5.1. Приведите пример непрерывного отображения хаусдорфовых топологических пространств, которое
(a) замкнуто и сюръективно (и поэтому факторно), но не открыто;
(b) открыто и сюръективно (и поэтому факторно), но не замкнуто;
(c) факторно, но не является ни открытым, ни замкнутым.

5.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — факторное отображение, и пусть $A \subset X$. Обязательно ли отображение $f|_A\colon A \to f(A)$ — факторное?

5.3. Постройте гомеоморфизм между $\mathbb{RP}^1$ и S^1. (*Указание*: умножение комплексных чисел.)

5.4. Пусть B^n — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ единичного радиуса с центром в нуле, S^{n-1} — его граница ($n-1$-мерная сфера). Введем на B^n следующее отношение эквивалентности: если $x, y \in S^{n-1}$, то $x \sim y$ тогда и только когда, когда $x = \pm y$, а точки, не лежащие на S^{n-1}, эквивалентны только сами себе. Покажите, что факторпространство $B^n/\sim$ гомеоморфно $\mathbb{RP}^n$.

5.5 (*комплексное проективное пространство*)**.** Обозначим через $\mathbb{CP}^n$ множество всех одномерных комплексных векторных подпространств в $\mathbb{C}^{n+1}$. Снабдим $\mathbb{CP}^n$ фактортопологией, порожденной отображением $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$, $v \mapsto \operatorname{span}\{v\}$. Эквивалентно, $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, где $u \sim v$ тогда и только тогда, когда $u = \lambda v$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Докажите, что $\mathbb{CP}^n$ компактно и хаусдорфово.

5.6. Покажите, что $\mathbb{CP}^1$ гомеоморфно S^2.

5.7. Пусть $I^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ — единичный квадрат. Введем на I^2 следующее отношение эквивалентности: $(0,t) \sim (1,t)$ и $(t,0) \sim (t,1)$ при всех $t \in [0,1]$, а остальные точки эквивалентны только сами себе. Покажите, что $I^2/\sim$ гомеоморфно тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

5.8. Пусть $I^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ — единичный квадрат. Введем на I^2 следующее отношение эквивалентности: $(0,t) \sim (1,1-t)$ и $(t,0) \sim (1-t,1)$ при всех $t \in [0,1]$, а остальные точки эквивалентны только сами себе. Покажите, что $I^2/\sim$ гомеоморфно $\mathbb{RP}^2$.

5.9. Пусть $I^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ — единичный квадрат. Введем на I^2 следующее отношение эквивалентности: $(0,t) \sim (1,1-t)$ при всех $t \in [0,1]$, а остальные точки эквивалентны только сами себе.
(a) Покажите, что $M = I^2/\sim$ — компактное хаусдорфово пространство (оно называется *листом Мёбиуса*).
(b) Покажите, что образ в M подмножества $[0;1] \times \{0,1\}$ гомеоморфен окружности (этот образ называется *краем* листа Мёбиуса).

5.10. Пусть $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ — единичный круг в $\mathbb{R}^2$ (см. задачу 5.4) и $S^1 \subset B^2$ — его граница. Покажите, что в результате склеивания листа Мёбиуса и B^2 по гомеоморфизму между краем листа Мёбиуса и $S^1 \subset B^2$ получится $\mathbb{RP}^2$.

5.11. Пусть $I^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ — единичный квадрат. Введем на I^2 следующее отношение эквивалентности: $(0,t) \sim (1,t)$ и $(t,0) \sim (1-t,1)$ при всех $t \in [0,1]$, а остальные точки эквивалентны только сами себе.
(a) Покажите, что $I^2/\sim$ — компактное хаусдорфово пространство (оно называется *бутылкой Клейна*).
(b) Покажите, что бутылку Клейна можно получить, склеивая два листа Мёбиуса по гомеоморфизму краев.

5.12. Докажите, что $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$ и бутылка Клейна являются топологическими многообразиями.