Связность. Компактность

4.1. Для каждой пары топологических пространств из следующего списка докажите, что они не гомеоморфны: **(a)** интервал и полуинтервал; **(b)** полуинтервал и отрезок; **(c)** отрезок и квадрат; **(d)** отрезок и окружность.

4.2. Опишите связные компоненты канторова множества.

4.3. Пусть X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$.
(a) Докажите, что шар в X является выпуклым множеством.
(b) Докажите, что выпуклое подмножество X линейно связно.
(c) Докажите, что если $\dim X > 1$, то $X \setminus \{0\}$ линейно связно.

4.4. Положим

$$X = \big\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leqslant 1\big\} \cup \big\{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) Докажите, что X связно, но не линейно связно.
(b) Опишите линейно связные компоненты пространства X. Замкнуты ли они в X? (Для сравнения напомним, что связные компоненты любого топологического пространства замкнуты.)

4.5. **(a)** Докажите, что объединение семейства связных подмножеств топологического пространства, попарные пересечения которых непусты, связно.
(b) Докажите аналогичный факт о линейно связных подмножествах.

4.6. Докажите, что **(a)** произведение любого семейства линейно связных топологических пространств линейно связно; **(b)** произведение любого семейства связных топологических пространств связно.

4.7. Обозначим через $M_n(\mathbb{R})$ пространство всех матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{R}$ и снабдим его стандартной топологией конечномерного векторного пространства, порожденной какой-либо[1] нормой. Компактны ли следующие подмножества $M_n(\mathbb{R})$?
(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;
(b) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$;
(c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A^\top = A^{-1}\}$ (ортогональные матрицы);
(d) $\{P \in M_n(\mathbb{R}) : P^2 = P\}$ (проекторы).

4.8. Пусть X — подмножество $\mathbb{R}^n$. Предположим, что каждая непрерывная функция из X в $\mathbb{R}$ ограничена. Докажите, что X компактно.

На самом деле утверждение из предыдущей задачи верно для любого метрического (но не любого топологического) пространства X. Это — задача «со звездочкой» для гурманов.

4.9. Постройте гомеоморфизм между тором $T^2 = S^1 \times S^1$ и поверхностью бублика в $\mathbb{R}^3$ (сначала дайте строгое определение последней).

4.10. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся подмножества метрического пространства X, причем одно из них компактно. **(a)** Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(a, b) > \varepsilon$ для всех $a \in A$, $b \in B$. **(b)** Сохраняет ли силу п. (a) без предположения о компактности?

4.11. Докажите, что замкнутый шар в пространствах **(a)** ℓ^1; **(b)** ℓ^2; **(c)** ℓ^∞; **(d)** $C[a, b]$ некомпактен. Являются ли перечисленные пространства локально компактными?

Указание: в каждом из этих шаров есть бесконечное подмножество, попарные расстояния между элементами которого больше некоторой положительной константы.

[1] Неважно какой, т.к. на конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны — см. лекции.

На самом деле ни в каком бесконечномерном нормированном пространстве шар не является компактным множеством. Мы этого доказывать не будем.

4.12. Пусть X и Y — топологические пространства, $p\colon X \times Y \to X$ — проекция (т.е. $p(x,y) = x$ для всех $(x,y) \in X \times Y$).
(a) Докажите, что p открыто.
(b) Докажите, что если Y компактно, то p замкнуто.
(c) Сохраняет ли силу п. (b) для некомпактного Y?

4.13. Докажите, что произведение $\prod_{i\in I} X_i$ семейства топологических пространств $(X_i)_{i\in I}$ локально компактно тогда и только тогда, когда все X_i локально компактны и лишь конечное их число некомпактно.

В следующих задачах для топологического пространства X через X_+ обозначена его одноточечная компактификация.

4.14. Постройте гомеоморфизмы между **(a)** $\mathbb{N}_+$ и некоторым подмножеством отрезка $[0,1]$; **(b)** $(\mathbb{R}^2)_+$ и S^2; **(c)** $(\mathbb{R}^n)_+$ и S^n.

4.15. Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Доопределим f до отображения $f_+\colon X_+ \to Y_+$, полагая $f_+(\infty) = \infty$.
(a) Найдите условие на f, необходимое и достаточное для того, чтобы f_+ было непрерывным. (Отображения f, удовлетворяющие этому условию, называются *собственными*.)
(b) Приведите пример непрерывного отображения, не являющегося собственным.
(c) Докажите, что собственное отображение хаусдорфова пространства в локально компактное хаусдорфово пространство замкнуто.