Подпространства. Непрерывные отображения. Произведения

3.1. Какие из следующих подмножеств отрезка $[-1,1]$ открыты в нем, а какие открыты в $\mathbb{R}$? Те же вопросы про замкнутость. **(a)** $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| < 1\}$; **(b)** $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| \leqslant 1\}$; **(c)** $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 \leqslant |x| < 1\}$; **(d)** $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 \leqslant |x| \leqslant 1\}$.

3.2. Определим отображение $f\colon [0,1) \to S^1$ (где $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ — окружность) формулой $f(t) = e^{2\pi i t}$. Является ли f **(a)** непрерывной биекцией; **(b)** открытым отображением; **(c)** замкнутым отображением; **(d)** гомеоморфизмом?

3.3. Постройте (задайте явной формулой) гомеоморфизм между окружностью $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ и границей квадрата $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} = 1\}$. (Топология на обоих пространствах порождается обычной евклидовой метрикой.)

3.4. Пусть X — нормированное пространство. Постройте (задайте явными формулами) гомеоморфизмы между
(a) открытыми шарами $B_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$ и $B_1(0)$;
(b) открытым шаром $B_1(0)$ и пространством X.

3.5. (a) Докажите, что стереографическая проекция — гомеоморфизм между $S^2 \setminus \{p\}$ и $\mathbb{R}^2$.
(b) Постройте аналогичный гомеоморфизм между $S^n \setminus \{p\}$ и $\mathbb{R}^n$.
(c) Докажите, что сфера S^n является топологическим многообразием.

3.6. Приведите пример секвенциально непрерывного отображения топологических пространств, не являющегося непрерывным.

Напомним (см. лекции), что индуцированная топология на подмножестве Y топологического пространства X обладает следующим свойством: для любого топологического пространства Z отображение $f\colon Z \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция $i_Y \circ f\colon Z \to X$ (где $i_Y\colon Y \to X$ — отображение включения).

3.7. Докажите, что индуцированная топология на подмножестве Y топологического пространства X — это единственная топология на Y, обладающая указанным выше свойством.

3.8. Пусть X — множество. Докажите, что топология поточечной сходимости на $\mathbb{R}^X$ совпадает с топологией произведения.

3.9. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Для любых $x, y \in X$ положим

$$\rho'(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\}.$$

Покажите, что ρ' — метрика, порождающая ту же самую топологию, что и метрика ρ. (Преимущество ρ' в том, что в этой метрике пространство X ограничено.)

Напомним (см. лекции), что произведение конечного семейства метризуемых топологических пространств метризуемо.

3.10. (a) Покажите, что произведение счетного семейства метризуемых топологических пространств метризуемо. (*Указание*: $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x_n, y_n)/2^n$.)
(b) Верно ли это для несчетных произведений?

3.11. Метризуемо ли дизъюнктное объединение метризуемых топологических пространств?

3.12. Покажите, что канторово множество гомеоморфно произведению счетного семейства «двоеточий» (дискретных двухэлементных пространств).

3.13 (*канторова лестница*)**.** Определим функцию c в концах отрезка $[0,1]$, полагая $c(0)=0$ и $c(1)=1$, а затем доопределим ее на «средней трети» $[1/3,2/3]$ этого отрезка формулой $c(x)=(c(0)+c(1))/2$. Затем проделаем ту же процедуру с отрезками $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$; в итоге получим функцию на множестве $\{0\}\cup[1/9,2/9]\cup[1/3,2/3]\cup[7/9,8/9]\cup\{1\}$, принимающую на отрезках $[1/9,2/9]$ и $[7/9,8/9]$ значения $1/4$ и $3/4$ соответственно. Продолжая этот процесс, получим функцию $c\colon D\to[0,1]$, где $D\supset[0,1]\setminus C$, а C — канторово множество. Докажите, что построенная функция единственным образом продолжается до непрерывной функции $c\colon[0,1]\to[0,1]$.

3.14 (*кривая Пеано*)**. (a)** Пусть C — канторово множество. Постройте непрерывную сюръекцию $C\to[0,1]$.
(b) Докажите, что $C\times C$ гомеоморфно C.
(c) Постройте непрерывную сюръекцию $C\to[0,1]\times[0,1]$.
(d) Пусть $A\subset[0,1]$ — замкнутое множество и $B\subset\mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Докажите, что каждое непрерывное отображение $A\to B$ продолжается до непрерывного отображения $[0,1]\to B$.
(e) Постройте непрерывную сюръекцию $[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$.