

Метрические и топологические пространства: примеры

Напомним (см. лекции), что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ на пространстве \mathbb{R}^n определяются формулами

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{где } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Для $p \in \{1, 2, \infty\}$ и $r > 0$ положим $B_r^{(p)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p < r\}$.

1.1. (а) Нарисуйте единичный шар $B_1^{(p)}$ на плоскости \mathbb{R}^2 для $p = 1, 2, \infty$. Какие между этими шарами есть отношения включения?

(б) Найдите наибольшие $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ такие, что $B_1^{(1)} \supset B_{\varepsilon_1}^{(2)}$, $B_1^{(2)} \supset B_{\varepsilon_2}^{(\infty)}$ и $B_1^{(1)} \supset B_{\varepsilon_3}^{(\infty)}$. Нарисуйте картинки, соответствующие этим включениям.

1.2. (а) Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на векторном пространстве X (над полем \mathbb{R} или \mathbb{C}), и пусть B и B' — соответствующие открытые шары в X с центром в нуле радиуса 1. Докажите, что $B \subset B' \iff \|\cdot\|' \leq \|\cdot\|$.

(б) Каким неравенствам между нормами $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ на \mathbb{R}^2 соответствуют включения из задачи 1.1?

1.3. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Для каждой пары $p, q \in \{1, 2, \infty\}$ укажите наименьшую константу $C = C_{p,q} > 0$ такую, что $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$ на \mathbb{R}^n . (Указание: для $n = 2$ ответ уже известен из предыдущей задачи.)

1.4. Докажите, что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ порождают одну и ту же топологию на \mathbb{R}^n (так называемую *стандартную* топологию).

Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое число. Напомним (см. лекции), что p -адическая норма $|x|_p$ числа $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ определяется следующим образом: запишем x в виде $x = p^r a/b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, причем p не делит ни a , ни b , и положим $|x|_p = p^{-r}$. Также полагаем по определению $|0|_p = 0$.

1.5. Докажите, что p -адическая норма на \mathbb{Q} обладает следующими свойствами: **(1)** $|x|_p > 0$ для $x \neq 0$; **(2)** $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ для всех x, y ; **(3)** $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ для всех x, y . Выведите из этих свойств, что $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ — метрика на \mathbb{Q} .

Метрика ρ на множестве X называется *неархимедовой* (или *ультраметрикой*), если неравенство треугольника выполняется в следующем усиленном виде: $\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$ для всех $x, y, z \in X$. Например, p -адическая метрика на \mathbb{Q} неархимедова (см. п. 3 задачи 1.5).

1.6. Докажите, что в метрическом пространстве с неархимедовой метрикой **(а)** все треугольники равнобедренные (вначале строго сформулируйте соответствующее утверждение!); **(б)** каждая точка шара (неважно, открытого или замкнутого) является его центром; **(с)** любые два шара (неважно, открытых или замкнутых) либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом; **(д)** всякая сфера положительного радиуса открыта; **(е)** всякий замкнутый шар положительного радиуса открыт; **(ф)** всякий открытый шар замкнут.

Пусть X — метрическое пространство и $A, B \subset X$ — ограниченные множества. Напомним (см. лекции), что *расстояние Хаусдорфа* между A и B определяется формулой

$$\rho_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\}.$$

1.7. Пусть X — метрическое пространство. Докажите, что

(а) для любых ограниченных множеств $A, B \subset X$ справедливо равенство

$$\rho_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B), B \subset U_r(A)\},$$

где $U_r(A) = \{x \in X : \rho(x, A) < r\}$ — r -окрестность A ;

(б) расстояние Хаусдорфа является метрикой на классе всех замкнутых ограниченных подмножеств пространства X .

Пусть X — множество, \mathbb{K}^X — пространство всех \mathbb{K} -значных функций на X (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Зафиксируем какую-нибудь подалгебру $A \subset \mathbb{K}^X$ (т.е. векторное подпространство в \mathbb{K}^X , содержащее функцию, тождественно равную 1, и вместе с любыми двумя функциями содержащее их произведение). Для каждого подмножества $S \subset A$ положим

$$V(S) = \{x \in X : \forall f \in S f(x) = 0\}.$$

Напомним (см. лекции), что *топология Зарисского* на X (соответствующая алгебре A) — это такая топология на X , в которой замкнуты множества вида $V(S)$ для всевозможных $S \subset A$ и только они.

1.8. (a) Докажите, что топология Зарисского действительно является топологией. Опишите ее в явном виде для следующих случаев:

(b) X — любое множество, $A = \mathbb{K}^X$;

(c) $X = \mathbb{K}$, $A = \mathbb{K}[t]$ (алгебра многочленов);

(d) $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $A = C[a, b]$ (алгебра непрерывных функций).

Ответ к п. (d): эта топология совпадает с обычной топологией на $[a, b]$.

Пусть X — множество. Зафиксируем подмножество $S \subset \mathbb{K}^X$. Для $x \in X$ и интервала $I \subset \mathbb{R}$ положим

$$G(x, I) = \{f \in S : f(x) \in I\}.$$

Напомним (см. лекции), что *топология поточечной сходимости* на S — это топология, предбазу которой образуют множества $G(x, I)$ для всевозможных $x \in X$ и всевозможных интервалов $I \subset \mathbb{R}$.

1.9. Пусть X — множество.

(a) Докажите, что топология поточечной сходимости на \mathbb{R}^X хаусдорфова.

(b) Докажите, что если X несчетно, то для любой $f \in \mathbb{R}^X$ пересечение любого счетного семейства ее окрестностей является бесконечным множеством. Как следствие, \mathbb{R}^X не удовлетворяет первой аксиоме счетности и тем более неметризуемо.

(c) Снабдим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ топологией поточечной сходимости. Докажите, что у каждой $f \in C[a, b]$ существует счетное семейство окрестностей, пересечение которого есть $\{f\}$; однако $C[a, b]$ все равно не удовлетворяет первой аксиоме счетности и тем более неметризуемо.