3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И НАКРЫТИЯ

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ — фактор-пространство сферы $S^2 \overset{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ по отношению $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$; пусть $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — стандартная проекция. Обозначим $M \overset{\text{def}}{=} p(C)$, где $C = \{(x, y, z) \in S^2 \mid |z| \le 1/2\}$.

Задача 1. а) Докажите, что M гомеоморфно ленте Мебиуса и гомотопически эквивалентно окружности. б) Пусть $\iota : M \to \mathbb{R}P^2$ — тавтологическое вложение ($\iota(a) = a \in \mathbb{R}P^2$ для всякой точки $a \in M \subset \mathbb{R}P^2$). Вычислите гомоморфизм групп $\iota_* : \pi_1(M) \to \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ (т.е. сначала найдите группу $\pi_1(M)$; группа $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ вычислялась на лекциях. После этого для каждого элемента $x \in \pi_1(M)$ укажите явно элемент $\iota_*(x) \in \pi_1(\mathbb{R}P^2)$.)

Задача 2. а) Топологическое пространство $Y_3 \overset{\text{def}}{=} \{(u_1, u_2, u_3), u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \ne u_2 \ne u_3 \ne u_1\}$. На нем действует группа перестановок S_3: если $\sigma \in S_3$ — перестановка чисел $1, 2, 3$, то отображение $R_\sigma : Y_3 \to Y_3$ определено формулой $R_\sigma(u_1, u_2, u_3) \overset{\text{def}}{=} (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, u_{\sigma(3)})$. Пусть X_3 — фактор Y_3 по действию группы (две тройки $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in Y_3$ эквивалентны, если отличаются только порядком точек). Докажите, что отображение проекции $p : Y_3 \to X_3$ — накрытие. б) Пусть $u \in Y_3$ — какая-то точка, и $v \overset{\text{def}}{=} p(u) \in X_3$. Рассмотрим петлю $\gamma : [0, 1] \to X_3$ такую, что $\gamma(0) = \gamma(1) = v$, и пусть $\Gamma : [0, 1] \to Y_3$ — ее поднятие с начальной точкой $\Gamma(0) = u$. Обозначим $\sigma \in S_3$ перестановку, для которой $\Gamma(1) = R_\sigma(u)$. Докажите, что соответствие $\gamma \mapsto \sigma^{-1}$ — гомоморфизм групп $\pi_1(X_3, v) \to S_3$. в) Докажите, что группа $\pi_1(X_3, v)$ некоммутативна.