Введение в топологию

Программа экзамена 29.06.2020

Эта программа отличается от выложенных ранее вопросов лишь изменением типографского оформления. В целях удобства проведения экзамена в онлайн-формате добавлено разделение на темы и удалено разделение на «традиционные» экзаменационные вопросы. Чуть более подробно, чем ранее, расписан предпоследний пункт в теме 5.

1. **Фундаментальная группа: построение**
   - Гомотопия отображений.
   - Согласованность гомотопии с композициями.
   - Гомотопия относительно подмножества.
   - Пример: линейная гомотопия отображений со значениями в выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^n$.
   - Гомотопия путей.
   - Пример: «замена параметра».
   - Произведение путей и их гомотопических классов. Свойства операции умножения гомотопических классов путей.
   - Фундаментальная группа.
   - Пример: фундаментальная группа выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$.
2. **Фундаментальная группа окружности**
   - Поднятия отображений $Y \to S^1$ до отображений $Y \to \mathbb{R}$: единственность (для произвольного связного пространства Y) и существование (для компактного звездного подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$).
   - Вращение петли $[0,1] \to (S^1, 1)$. Гомотопическая инвариантность вращения.
   - Вычисление фундаментальной группы окружности.
3. **Индуцированные гомоморфизмы фундаментальных групп**
   - Пространства с отмеченной точкой и их отображения.
   - Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением пространств с отмеченной точкой.
   - Свойства индуцированных гомоморфизмов.
   - Ретракции. Примеры.
   - Несуществование ретракции замкнутого круга на его границу.
   - Теорема Брауэра о неподвижной точке (двумерный случай).
   - Изоморфизм фундаментальной группы пространства и линейно связной компоненты отмеченной точки.
   - Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки.
   - Фундаментальная группа произведения. Примеры: фундаментальная группа тора и фундаментальная группа $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

4. **Односвязные пространства**

   - Эквивалентные определения односвязных пространств (через петли и через пути).
   - Односвязность выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$.
   - Лемма о лебеговом числе.
   - Односвязность n-мерной сферы при $n \geqslant 2$.

5. **Гомотопическая эквивалентность**

   - Определение гомотопической эквивалентности.
   - Деформационные ретракции и строгие деформационные ретракции.
   - Сфера S^n как строгий деформационный ретракт $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
   - Стягиваемые пространства, их эквивалентные определения, примеры.
   - Как связаны гомоморфизмы фундаментальных групп, индуцированные гомотопными отображениями? (Случаи гомотопий пространств с отмеченной точкой и произвольных гомотопий.)
   - Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (тривиальный случай — эквивалентность пространств с отмеченной точкой и более сложный случай — эквивалентность пространств без отмеченной точки).
   - Односвязность стягиваемых пространств.

6. **Накрытия. Теорема о накрывающей гомотопии**

   - Определение накрытия.
   - Примеры накрытий.
   - Число листов накрытия, его независимость от выбора точки базы (если последняя связна).
   - Поднятия отображений. Теорема о единственности поднятия отображения из связного пространства.
   - Теорема о накрывающей гомотопии.
   - Следствия: теорема о поднятии путей, теорема о поднятии гомотопий путей.
   - Отображение фундаментальной группы базы накрытия в слой над отмеченной точкой; условия его сюръективности и биективности.
   - Фундаментальная группа вещественного проективного пространства.

7. **Накрытия с отмеченной точкой и подгруппы в $\pi_1(X, x_0)$**

   - Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрывающим отображением: его мономорфность и описание его образа.
   - Критерий существования поднятия отображения, действующего в базу накрытия, до отображения в накрывающее пространство.
   - Следствие: существование и единственность поднятия отображения из односвязного пространства.
   - Пунктированные накрытия и их морфизмы.
   - Теорема о классификации морфизмов связных пунктированных накрытий.
   - Критерий изоморфизма связных пунктированных накрытий в терминах подгрупп фундаментальной группы базы.

8. **Накрытия без отмеченной точки и транзитивные $\pi_1(X, x_0)$-множества**

   - Действие монодромии.
   - Условие транзитивности действия монодромии.
   - Описание стабилизатора точки слоя при действии монодромии.
   - Морфизмы G-множеств. Изоморфизм между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору.
   - Следствие: изоморфизм между слоем накрытия и множеством смежных классов фундаментальной группы базы накрытия по образу фундаментальной группы накрывающего пространства.
   - Морфизмы накрытий.
   - Ограничение морфизма накрытий на слой является морфизмом $\pi_1(X, x_0)$-множеств.
   - Морфизмы транзитивных G-множеств с отмеченной точкой: единственность и критерий существования.
   - Теорема о классификации морфизмов связных накрытий (биективность соответствия между морфизмами накрытий и морфизмами соответствующих $\pi_1(X, x_0)$-множеств).
   - Действие группы сопряжениями (на себе и на множестве подгрупп). Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты. Критерий изоморфизма транзитивных G-множеств.
   - Критерий изоморфизма накрытий в терминах $\pi_1(X, x_0)$-множеств и в терминах подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$.

9. **Автоморфизмы накрытий**

   - Нормализатор подгруппы в группе.
   - Описание группы автоморфизмов транзитивного G-множества в терминах группы G.
   - Описание группы автоморфизмов связного накрытия в терминах фундаментальной группы базы.
   - Следствие: описание группы автоморфизмов односвязного накрытия.

10. **Универсальное накрытие. Классификация накрытий**

    - Универсальное накрытие и его универсальное свойство.
    - Относительно односвязные подмножества и полулокально односвязные пространства. Примеры и контрпримеры.
    - Необходимое условие существования универсального накрытия.
    - Теорема о существовании универсального накрытия.
    - Примеры универсальных накрытий.
    - Факторизация накрытий по действиям групп автоморфизмами.
    - Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы.
    - Теорема о классификации накрытий (с отмеченной точкой и без).