

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ  
Вопросы к экзамену 31.03.2020  
(предварительная версия)

1. Гомотопия отображений. Согласованность гомотопии с композициями. Гомотопия относительно подмножества. Пример: линейная гомотопия отображений со значениями в выпуклом подмножестве  $\mathbb{R}^n$ .
2. Гомотопия путей. Пример: замена параметра. Произведение путей и их гомотопических классов. Свойства операции умножения гомотопических классов путей. Фундаментальная группа. Пример: фундаментальная группа выпуклого множества в  $\mathbb{R}^n$ .
3. Поднятия отображений  $Y \rightarrow S^1$  до отображений  $Y \rightarrow \mathbb{R}$ : единственность (для произвольного связного пространства  $Y$ ) и существование (для компактного звездного подмножества  $Y \subset \mathbb{R}^n$ ).
4. Вращение петли  $[0, 1] \rightarrow (S^1, 1)$ . Гомотопическая инвариантность вращения. Фундаментальная группа окружности.
5. Пространства с отмеченной точкой и их отображения. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением пространств с отмеченной точкой. Свойства индуцированных гомоморфизмов. Ретракции. Примеры. Несуществование ретракции замкнутого круга на его границу. Теорема Брауэра о неподвижной точке (двумерный случай).
6. Изоморфизм фундаментальной группы пространства и линейно связной компоненты отмеченной точки. Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки. Односвязные пространства, их эквивалентные определения (через петли и через пути). Односвязность выпуклых подмножеств  $\mathbb{R}^n$ .
7. Лемма о лебеговом числе. Односвязность  $n$ -мерной сферы при  $n \geq 2$ .
8. Фундаментальная группа произведения. Примеры: фундаментальная группа тора и фундаментальная группа  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .
9. Гомотопическая эквивалентность. Деформационные ретракции и строгие деформационные ретракции. Сфера  $S^n$  как строгий деформационный ретракт  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Стягиваемые пространства, их эквивалентные определения, примеры.
10. Гомоморфизмы фундаментальных групп, индуцированные гомотопными отображениями (случаи гомотопий пространств с отмеченной точкой и произвольных гомотопий). Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Односвязность стягиваемых пространств.
11. Накрытия. Примеры накрытий. Число листов накрытия, его независимость от выбора точки базы (если последняя связна). Теорема о единственности поднятия.
12. Теорема о накрывающей гомотопии. Следствия: теорема о поднятии путей, теорема о поднятии гомотопий путей.

13. Отображение фундаментальной группы базы накрытия в слой над отмеченной точкой; условия его сюръективности и биективности. Фундаментальная группа вещественного проективного пространства.
14. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрывающим отображением: его мономорфность и описание его образа. Критерий существования поднятия отображения, действующего в базу накрытия, до отображения в накрывающее пространство. Следствие: существование и единственность поднятия отображения из односвязного пространства.
15. Пунктированные накрытия и их морфизмы. Теорема о классификации морфизмов связных пунктированных накрытий и критерий их изоморфизма в терминах подгрупп фундаментальной группы базы.
16. Действие монодромии. Условие его транзитивности. Описание стабилизатора точки слоя при действии монодромии.
17. Морфизмы  $G$ -множеств. Изоморфизм между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору. Следствие: изоморфизм между слоем накрытия и множеством смежных классов фундаментальной группы базы накрытия по образу фундаментальной группы накрывающего пространства.
18. Морфизмы накрытий. Ограничение морфизма накрытий на слой является морфизмом  $\pi_1(X, x_0)$ -множеств. Морфизмы транзитивных  $G$ -множеств с отмеченной точкой: единственность и критерий существования. Теорема о классификации морфизмов связных накрытий (биективность соответствия между морфизмами накрытий и морфизмами соответствующих  $\pi_1(X, x_0)$ -множеств).
19. Действие группы сопряжениями (на себе и на множестве подгрупп). Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты. Критерий изоморфизма транзитивных  $G$ -множеств. Критерий изоморфизма накрытий в терминах подгрупп фундаментальной группы базы.
20. Нормализатор подгруппы в группе. Описание группы автоморфизмов транзитивного  $G$ -множества в терминах группы  $G$ . Описание группы автоморфизмов связного накрытия в терминах фундаментальной группы базы. Следствие: группа автоморфизмов односвязного накрытия.
21. Универсальное накрытие и его универсальное свойство. Относительно односвязные подмножества и полулокально односвязные пространства. Примеры и контрпримеры. Необходимое условие существования универсального накрытия.
22. Теорема о существовании универсального накрытия. Примеры универсальных накрытий.
23. Факторизация накрывающего пространства по действию группы. Построение накрытия по подгруппе фундаментальной группы. Теорема о классификации накрытий (с отмеченной точкой и без).