Введение в топологию

Вопросы к коллоквиуму 01.02.2020

1. Метрические пространства, нормированные пространства, евклидовы пространства. Примеры: $\mathbb{R}^n$, $C[a,b]$, дискретная метрика, $\ell^\infty(S)$, ℓ^1, ℓ^2, p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$, метрика Хаусдорфа (в неочевидных случаях неравенство треугольника можно не доказывать). Открытые множества в метрическом пространстве, их свойства. Открытость открытого шара.

2. Топологические пространства. Хаусдорфовость, метризуемость. Замкнутые множества. Примеры: дискретная и антидискретная топологии, топология Зарисского (без доказательства выполнения аксиом топологического пространства). База и предбаза топологии. Примеры. Критерий существования топологии с данной (пред)базой. Пример: топология поточечной сходимости.

3. Сходимость последовательностей в топологическом пространстве. Описание сходящихся последовательностей в метрическом пространстве. Единственность предела последовательности в хаусдорфовом пространстве.

4. Замыкание множества в топологическом пространстве. Свойства операции замыкания. Предельные и изолированные точки, внутренность и граница множества; примеры. Плотные множества и сепарабельные пространства.

5. Первая и вторая аксиомы счетности. Описание замыкания через последовательности в пространствах с первой аксиомой счетности.

6. Непрерывные отображения топологических пространств. Критерии непрерывности (в терминах прообразов открытых или замкнутых множеств, в терминах непрерывности в точке, в терминах операции замыкания). Непрерывность (в точке) композиции непрерывных отображений.

7. Эквивалентность непрерывности и секвенциальной непрерывности для пространств с первой аксиомой счетности. Гомеоморфизмы. Открытые и замкнутые отображения. Примеры гомеоморфизмов. Топологические многообразия; примеры.

8. Индуцированная топология на подпространстве топологического пространства. Ее описание в метрическом случае. Свойства индуцированной топологии. Замкнутые подмножества и замыкание в индуцированной топологии.

9. Инициальная топология, порожденная семейством отображений. Свойства инициальной топологии. Произведения топологических пространств. Описание базы произведения в общем случае и в случае конечного числа сомножителей. Универсальное свойство произведения.

10. Метризуемость конечного произведения метризуемых пространств. Декартово произведение семейства непрерывных отображений. Непрерывность поточечных суммы и произведения непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}$. Критерий хаусдорфовости пространства в терминах диагонали. Замкнутость множества точек совпадения двух непрерывных отображений.

11. Финальная топология, порожденная семейством отображений. Свойства финальной топологии. Дизъюнктные объединения топологических пространств. Универсальное свойство дизъюнктного объединения.

12. Связные топологические пространства. Примеры. Связность отрезка. Основные свойства связных пространств.

13. Линейно связные топологические пространства и их связность. Основные свойства линейно связных пространств. Примеры. Описание связных подмножеств прямой. Теорема «о промежуточном значении».

14. Связные и линейно связные компоненты, их свойства, примеры. Локально линейно связные пространства и свойства их компонент.

15. Компактные топологические пространства. Критерий компактности в терминах замкнутых множеств. Критерий компактности подпространства (в терминах покрытий множествами, открытыми в топологии объемлющего пространства).

16. Основные свойства компактных топологических пространств (связь компактности подпространств и их замкнутости, свойства непрерывных отображений из компактного пространства). Основное свойство функций на компактном пространстве со значениями в $\mathbb{R}$.

17. Центрированные семейства множеств и их свойства. Теорема Тихонова о компактности произведения. Критерий компактности подмножества в $\mathbb{R}^n$.

18. Локально компактные топологические пространства. Примеры и контрпримеры. Локальная компактность конечных произведений, замкнутых и открытых подмножеств.

19. Одноточечная компактификация, ее основные свойства (компактность, критерий хаусдорфовости…). «Единственность» одноточечной компактификации. Примеры одноточечных компактификаций.

20. Понятия мажорирования и эквивалентности норм на векторном пространстве. Критерий мажорирования одной нормы другой. Теорема об эквивалентности норм на конечномерном векторном пространстве.

21. Факторпространства топологических пространств. Свойства фактортопологии. Универсальное свойство факторпространств. Примеры: окружность как отрезок со склеенными концами, тор как факторпространство квадрата.

22. Частные случаи факторизации: стягивание подмножества в точку и склейка по отображению. Примеры: круг со стянутой в точку границей, склейка двух кругов по границам.

23. Факторные отображения. Связь между факторными отображениями $X \to Y$ и гомеоморфизмами $(X/{\sim}) \to Y$. Критерий факторности в терминах насыщенных множеств. Достаточные условия факторности. Пример: X как факторпространство $X \times Y$.

24. Критерий хаусдорфовости факторпространства. Вещественное проективное пространство, его эквивалентные определения (как факторпространство $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ и как факторпространство S^n), компактность и хаусдорфовость.

25. Регулярные и нормальные топологические пространства. Характеризации регулярности и нормальности в терминах окрестностей. Регулярность локально компактных хаусдорфовых пространств. Нормальность компактных хаусдорфовых пространств и метризуемых пространств.

26. Лемма Урысона.