СЕМИНАР 14

Задача 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество и $f : U \to \mathbb{R}^k$, где $k \leq n$, — отображение класса C^1. Ранг производной $f'(a)$ в точке $a \in U$ равен k. а) Докажите, что $f(a)$ — внутренняя точка множества $f(U) \subset \mathbb{R}^k$. б) Обязательно ли множество $f(U)$ открыто?

Задача 2. а) Пусть $f(u_1, \dots, u_n)$ — гладкая функция n переменных, $f(a) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial u_1}(a) \neq 0$. По теореме о неявной функции уравнение $f(x_1, x_2. \dots .x_n) = 0$ задает в окрестности точки a переменную x_1 как функцию остальных: $x_1 = x_1(x_2, \dots, x_n)$. Выразите $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$ через частные производные функции f. б) Пусть $F(u, v, w)$ — гладкая функция, для которой $F(a) = 0$, но все частные производные в точке a отличны от нуля. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает в некоторой окрестности a каждую из переменных как функцию двух других: $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ и $z = z(x, y)$. Докажите равенство $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1$. в) Пусть $f(u, v)$ — гладкая функция двух переменных, и уравнение $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ задает z как функцию x и y. Выразите $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ через частные производные функции f.

Задача 3. а) Пусть γ — кривая на плоскости, заданная в декартовых координатах как график функции $y(x)$, а в полярных координатах — как график функции $r(\varphi)$. Как связаны друг с другом производные функций y и r? б) Известно, что функция $y(x)$ удовлетворяет соотношению $y' = \frac{y-x}{y+x}$ при всех x. Какому соотношению удовлетворяет функция r? в) Найдите кривую, проходящую через точку $(0, 1)$, для которой функция y удовлетворяет соотношению из задачи 3б

Задача 4. Гладкая функция $x(a_0, \dots, a_n)$ задается уравнением $P(x) = 0$, где $P(t) \overset{\text{def}}{=} a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$. а) Докажите, что $\frac{\partial x}{\partial a_k} = -\frac{x^k}{P'(x)}$. б) Докажите равенства $\sum_{k=0}^n a_k \frac{\partial x}{\partial a_k} = 0$, $x \frac{\partial x}{\partial a_k} = \frac{\partial x}{\partial a_{k+1}}$ (для произвольного $k = 0, \dots, n-1$) и $\sum_{k=0}^n k a_k \frac{\partial x}{\partial a_k} = -x$ непосредственно (не пользуясь формулой задачи 4а). в) Найдите формулу для производной $\frac{\partial^2 x}{\partial a_k \partial a_\ell}$.

Задача 5. а) Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция, заданная формулой $f(x, y) = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$. Найдите ее регулярные значения. б) Для произвольного регулярного значения c и любой точки $a \in f^{-1}(c)$ найдите касательную ℓ_a к кривой $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^2$ в точке a (существование такой касательной вытекает из теоремы о неявной функции). Можно ли решить такую же задачу для каких-либо критических значений функции f? в) Те же вопросы про функцию $f(x, y) = x^2 - y^3 - y$.

Задача 6. а) При каких $a \in \mathbb{R}$ множество $S \cap E_a$, где $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — сфера единичного радиуса, а $E_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = a\}$ — эллипсоид, является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^3$? б) Нарисуйте множество $S \cap E_2$ вблизи точки $(0, 1, 0) \in S \cap E_2$.

Символом $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ обозначим множество матриц $n \times n$ с действительными матричными элементами.

Задача 7. а) Пусть $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. Докажите, что $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ — группа и гладкое подмногообразие в $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Найдите его размерность. б) Пусть $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$. Докажите, что $\mathrm{O}(n)$ — группа и гладкое подмногообразие в $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Найдите его размерность.