СЕМИНАР 13

Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — отображение класса C^1. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется регулярной, если производная $F'(x)$ — линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ранга k (это возможно только при $k \le n$). Точки, в которых ранг меньше k, называются критическими. Точка $c \in \mathbb{R}^k$ называется регулярным значением F, если среди прообразов $a \in F^{-1}(c)$ нет критических точек. (В частности, если $F^{-1}(c) = \varnothing$, то c считается регулярным значнием.) Остальные точки $\mathbb{R}^k$ называются критическими значениями F.

Задача 1. На рисунке 1 изображены множества $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\} \cap U$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая окрестность начала координат, а $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1. Докажите, что во всех случаях начало координат — критическая точка функции f.

Задача 2. а) Для каких точек a множества $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 - y^4\}$ найдется такая окрестность U, что в пересечении $U \cap \Gamma$ можно выразить y как функцию x? А x как функцию y? Укажите все точки, в произвольной окрестности которых невозможно ни то, ни другое, и нарисуйте множество Γ в окрестности этих точек. б) Для каких точек a множества $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)\}$ найдется такая окрестность U, что в пересечении $U \cap T$ можно выразить z как функцию x и y? А y как функцию x и z? А x как функцию y и z? Укажите все точки, в которых невозможно ни то, ни другое, ни третье.

Из теоремы об обратной функции вытекает, что если $n = k$ и $c \in \mathbb{R}^k$ — регулярное значение F, то для всякой точки $a \in F^{-1}(c)$ существует окрестность $U \ni c$ и функция $G : U \to \mathbb{R}^n$ того же класса гладкости, что и f, такая, что $G(c) = a$ и $F(G(y)) = y$ для всех $y \in U$.

Задача 3. а) Нарисуйте график функции $f(t) = t - \sin t$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) и найдите ее регулярные значения. б) Проверьте для всех регулярных значений c функции f утверждение теоремы об обратной функции (см. выше) непосредственно. Обладают ли таким же свойством какие-то из критических значений? в) Те же вопросы про функцию $f(t) = t - 2\sin t$.

Задача 4. а) Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано формулой $f(z) = z^2$, где $\mathbb{R}^2$ отождествляется с $\mathbb{C}$: $(x, y) \leftrightarrow x + iy$. Найдите регулярные значения отображения f. б) Нарисуйте образы под действием отображения f горизонтальных и вертикальных прямых в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что через каждую точку $w = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ проходит по одной кривой из каждого семейства, и нарисуйте в этой точке векторы (комплексные числа) $\frac{\partial f}{\partial x}(w)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(w)$. в) Проверьте непосредственно (как в задаче 3б) утверждение теоремы об обратной функции для произвольного регулярного значения. Существует ли обратная функция в какой-либо окрестности критического значения?

Задача 5. а) На рисунках 1.2 и 1.3 изображены множества $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\} \cap U$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая окрестность начала координат, а $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция класса C^2, все значения которой неотрицательны. Докажите, что все частные производные функции f порядка 2 в точке $(0, 0)$ равны нулю. б) На рисунке 2 изображено множество $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\} \cap U$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая окрестность начала координат, а $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция класса C^2. Докажите, что $(0, 0)$ — критическая точка функции f, а все частные производные порядка 2 функции f в точке $(0, 0)$ равны нулю. Можно ли утверждать то же самое для частных производных порядка 3? (при условии, что f — функция класса C^3). в) Пусть про функцию из пункта 5б

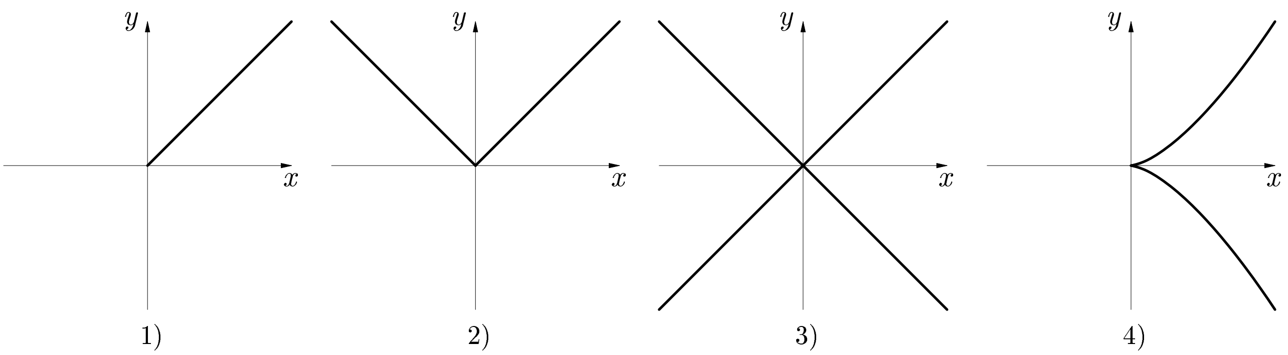

Рис. 1.

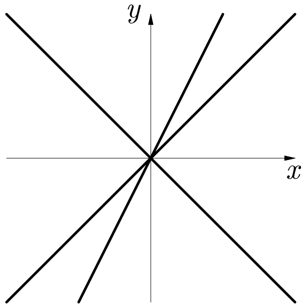

Рис. 2.

дополнительно известно, что она принадлежит классу C^6, а все ее значения неотрицательны. Докажите, что все ее частные производные порядка ≤ 5 в точке $(0,0)$ равны нулю. Можно ли утверждать то же самое про частные производные порядка 6?

Задача 6. Отображение $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ класса C^1, для которого $\gamma'(t) \neq 0$ для всех t, $\gamma(0) = \gamma(1)$ и $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, называется гладкой замкнутой кривой. Точка $c \in \mathbb{R}^2$ называется точкой простого трансверсального самопересечения, если $\gamma^{-1}(c)$ состоит из двух точек $t_1, t_2 \in (0,1)$, и векторы $\gamma'(t_1)$ и $\gamma'(t_2)$ не коллинеарны. Докажите, что точка простого трансверсального самопересечения гладкой замкнутой кривой изолирована — существует ее окрестность на плоскости, в которой других таких точек нет.

Указание. Рассмотрите отображение $G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $G(t,s) = \gamma(t) - \gamma(s)$.