# СЕМИНАР 12

**Задача 1.** Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется конусом, если для всякого $v \in K$ и всякого $t > 0$ вектор $tv \in K$. Пусть $K$ — открытый конус. Пусть также $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f : K \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^2$, удовлетворяющая равенству $f(tv) = t^\lambda f(v)$ для всех $v \in K$ и $t > 0$. Докажите тождество Эйлера $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda f$.

**Задача 2.** а) Существует ли отображение $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (вектор-функция) класса $C^\infty$, образ которого $h(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid y = |x|,\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$? б) Тот же вопрос, но $h(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid y = |x|\}$. в) Тот же вопрос, что в задаче 2а, но отображение $h$ определено и аналитично на некотором открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$.

**Задача 3.** а) Найдите критические точки функции $f(x, y) = \cos x + \cos y$. В каждой критической точке найдите гессиан (матрицу вторых производных) и определите, является ли она точкой локального экстремума, и если да, то максимума или минимума. б) Нарисуйте (желательно на одном чертеже) множества уровня $f^{-1}(c)$ при $c = 2, 1.99, 0.01, 0, -0.01, -1.99, -2$.

**Задача 4.** Аналогичная задача для функции $f(x, y) = xy(x + y - a)$, где $a \in \mathbb{R}$ — параметр. Уровни $c = 0$ и $c = \pm\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

**Задача 5.** а) Пусть $a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, а $\ell_1 = \{a_1 + v_1 t \mid t \in \mathbb{R}\}$ и $\ell_2 = \{a_2 + v_2 s \mid s \in \mathbb{R}\}$ — две прямые в $\mathbb{R}^n$, не параллельные друг другу. Найдите пару точек $q_1 \in \ell_1$, $q_2 \in \ell_2$ такую, что минимум расстояния $|p_1 - p_2|$ по всем точкам $p_1 \in \ell_1$ и $p_2 \in \ell_2$ достигается в $(q_1, q_2)$. Докажите, что вектор $q_1 - q_2$ перпендикулярен обеим прямым. Чему равен гессиан функции $f(p_1, p_2) = |p_1 - p_2|^2$ в этой точке? А если прямые пересекаются? А если прямые параллельны? б) Аналогичные вопросы в случае, когда $\ell_1 = \{a + vx + wy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ — плоскость в $\mathbb{R}^n$ с направляющими векторами $v$ и $w$, а прямая $\ell_2 = \{b + ut \mid t \in \mathbb{R}\}$ ей не параллельна (в частности, в ней не лежит).

**Задача 6.** Придумайте функцию $f(x, y)$ двух переменных класса $C^2$, у которой $(0, 0)$ является точкой локального минимума и единственной критической точкой, но глобальный минимум в этой точке не достигается. Докажите, что для функции $g(x)$ одной переменной класса $C^2$ это невозможно.