СЕМИНАР 11

Задача 1. Докажите, что функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ класса C^2 удовлетворяет соотношению $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (называемому одномерным волновым уравнением) тогда и только тогда, когда существуют функции $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (тоже класса C^2), для которых $f(t, x) = g(x + vt) + h(x - vt)$.

Указание. Рассмотрите функцию $F(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} f(\frac{p-q}{2v}, \frac{p+q}{2})$.

Задача 2. Пусть $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функции, сопоставляющие точке на плоскости ее полярный радиус (расстояние до начала координат) и полярный угол (угол между радиус-вектором и положительным направлением оси абсцисс). а) Напишите явные формулы для функций r и φ; особое внимание обратите на область определения. б) Докажите равенства $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{x}{r^2}$ и выведите аналогичные формулы для $\frac{\partial r}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. в) Вычислите $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

Задача 3. Пусть Π — плоскость. Если ввести на ней декартову систему координат (x, y), то произвольную функцию $f : \Pi \to \mathbb{R}$ можно рассматривать как функцию двух действительных переменных. Для краткости эту функцию часто обозначают той же буквой: f, а ее частные производные обозначают $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \Pi \to \mathbb{R}$ и т.д. Аналогично, если ввести на Π полярную систему координат, то функции f можно сопоставть функцию двух переменных (r, φ) и определить производные $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ и др. а) Выразите $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ через $\frac{\partial f}{\partial r}$ и $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$, и наоборот. б) Выразите $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ через частные производные (разных порядков) функции f по r и φ. в) Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Докажите равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, где $f(x, y) = (x + iy)^n$.

Задача 4. Пусть V — трехмерное пространство, в котором введены декартовы координаты (x, y, z) и сферические координаты (r, ψ, φ) (где $x = r \cos \psi \cos \varphi$, $y = r \cos \psi \sin \varphi$, $z = r \sin \psi$). По аналогии с задачей 3б выразите, для произвольной функции $f : V \to \mathbb{R}$, величину $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, через частные производные f по r, ψ, φ.

Замечание. Дифференциальный оператор $\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$ на множестве функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется оператором Лапласа. Ответ в задаче 3б называется оператором Лапласа в полярных координатах, в задаче 4 — в сферических.

Задача 5. Пусть $f(p_1, \dots, p_n)$ — многочлен, и $g(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1^n + \dots + x_n^n)$. Пусть также $G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{\partial^2 g}{\partial {x_i}^2}$. Очевидно, G — симметрический многочлен: $G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \dots, x_n)$, где σ — произвольная перестановка индексов $1, \dots, n$. По основной теореме о симметрических многочленах существует многочлен F такой, что $G(x_1, \dots, x_n) = F(x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1^n + \dots + x_n^n)$. Выразите многочлен F через частные производные многочлена f.