СЕМИНАР 9

Задача 1. а) Может ли непрерывное отображение переводить фундаментальную последовательность в нефундаментальную? а наоборот? б) Может ли полное метрическое пространство быть гомеоморфно неполному?

Задача 2. а) Функция $\varrho : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ задается формулой $\varrho(x,y) = |\operatorname{ctg}(\pi x) - \operatorname{ctg}(\pi y)|$. Докажите, что это метрика. Является ли она полной? б) Тот же вопрос про функцию $\varrho(x,y) = |x^2 - y^2|$.

Задача 3. Докажите, что пространство ℓ_∞, состоящее из ограниченных последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ $(x_i \in \mathbb{R})$ и снабженное метрикой $\varrho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$, полно.

Задача 4. Пусть $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции; $\varrho(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$. а) Докажите, что ϱ — метрика. б) Полно ли пространство непрерывных функций на $[0,1]$ с этой метрикой?

Задача 5. Пусть Q — множество подмножеств $M \subset \mathbb{R}$, которые являются конечными объединениями непересекающихся отрезков: $M = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$, $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_n$ (точка отрезком не считается!), а $P \subset Q$ — множество отрезков. Для произвольного множества $M \in Q$ обозначим $\ell(M) \stackrel{\text{def}}{=} (b_1 - a_1) + \dots + (b_n - a_n)$. а) Определим функцию $\varrho_1 : P^2 \to \mathbb{R}$ формулой $\varrho_1([a_1, b_1], [a_2, b_2]) \stackrel{\text{def}}{=} |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$. Докажите, что ϱ_1 — метрика и выясните, полно ли пространство P в этой метрике. б) Тот же вопрос для функции $\varrho_2 : P^2 \to \mathbb{R}$, заданной формулой $\varrho_2(S_1, S_2) = \ell(\overline{S_1 \triangle S_2})$.

Задача 6. Диаметром множества $X \subset M$ в метрическом пространстве M с метрикой ϱ называется $\operatorname{diam}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\varrho(u,v) \mid u, v \in X\}$. Пусть M — полное метрическое пространство, и $M \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$, где множества $X_1, X_2, \dots$ замкнуты, ограничены, и $\operatorname{diam}(X_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что пересечение $\bigcap_n X_n \neq \varnothing$.

Задача 7. Докажите, что если метрическое пространство компактно, то оно полно.

Задача 8. Пусть $f \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен; обозначим $\mu(f) \in \mathbb{N}$ наибольшую степень t, на которую делится f ($\mu(0) = \infty$ по определению). При $f, g \in \mathbb{C}[t]$ положим $\varrho(f,g) = 2^{-\mu(f-g)}$. а) Докажите, что $\varrho(f,h) \leq \max(\varrho(f,g), \varrho(g,h))$ для произвольных многочленов f, g, h. б) Докажите, что ϱ — метрика на $\mathbb{C}[t]$. в) Полна ли метрика ϱ?

Задача 9. В метрических пространствах задач 2б, 5а, 5б 8в опишите а) сходящиеся последовательности, б) фундаментальные последовательности, в) пополнения.

Задача 10. а) Докажите, что если множество $A \subset [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ (т.е. все элементы A — иррациональные числа) замкнуто, то оно нигде не плотно в $[0,1]$. б) Докажите, что $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ не является объединением счетного числа замкнутых множеств.

Указание (к задаче 10б)**.** Примените теорему Бэра к полному пространству $[0,1]$.

Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Для произвольной точки $x \in [0,1]$ назовем вариацией функции f в точке x число $\operatorname{var}_f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to +0} \sup\{f(u) - f(v) \mid u, v \in (x - t, x + t)\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Задача 11. а) Докажите, что функция f непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда $\operatorname{var}_f(x) = 0$. б) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $A_\varepsilon(f) = \{x \in [0,1] \mid \operatorname{var}_f(x) < \varepsilon\}$ открыто. в) Докажите, что множество точек разрыва произвольной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является объединением счетного числа замкнутых множеств.

Из задач 10б и 11в вытекает, что не существует функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных и разрывной в иррациональных точках.

Задача 12. а) Постройте функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, непрерывную в иррациональных и разрывную в рациональных точках. б) Постройте монотонно возрастающую функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, обладающую тем же свойством.