

СЕМИНАР 8

Задача 1. Найдите площадь фигуры а) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, \ln x \leq y \leq 0\}$, б) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \pi/2, \sin x \leq e^y \leq 1\}$.

Задача 2. При каких значениях параметров $(a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ сходится интеграл? Вычислите его.
а) $\int_0^1 x^\alpha dx$, б) $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$, в) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$, г) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$.

Задача 3. При каких действительных значениях параметров сходится интеграл? а) $\int_0^1 x^\alpha \ln^\beta x dx$, б) $\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln^\beta x dx$,
в) $\int_0^1 x^\alpha \sin(1/x) dx$, г) $\int_1^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx$, д) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx^2) dx$.

Задача 4. а) Докажите, что $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$. б) Вычислите $\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx$ при всех $a > 0$.

Указание (к пункту 4а). $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$.