

СЕМИНАР 7

Задача 1. Найдите производную $\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)^{(k)}(0)$ при $0 \leq k \leq 4$.

Задача 2. Докажите, что в некоторой окрестности точки $x = 0$ существует и единственная аналитическая функция f , удовлетворяющая уравнению $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$. Найдите степенной ряд (по степеням x), представляющий эту функцию.

Задача 3. а) При $a \neq 1$ график функции $y = \ln(1+x)$ пересекает прямую $y = ax$ в начале координат и еще в одной точке, абсциссу которой обозначим $f(a)$; также положим по определению $f(1) = 0$. Является ли f аналитической функцией? Найдите $f^{(k)}(1)$ при $k = 1, 2, 3$. б) При $a > 0$ график функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, пересекает прямую $y = (1+a)x$ в начале координат и еще в двух точках, симметричных друг другу относительно начала координат. Абсциссу точки пересечения, лежащий правее нуля, обозначим $f(a) > 0$; также положим по определению $f(0) = 0$. Существует ли аналитическая функция F , определенная в окрестности точки $a = 0$ и такая, что $F(a) = f(a)$ при $a \geq 0$? в) А такая, что $F(a) = f(a^2)$ при всех a ? г) А такая, что $F(a) = (f(a))^2$ при $a \geq 0$?

Задача 4. Найдите производные $z^{(k)}(0)$ при $k = 1, 2, 3$, где z — аналитическая функция, удовлетворяющая уравнению $z^3(x) - z(x) - x = 0$ и такая, что а) $z(0) = 1$, б) $z(0) = -1$, в) $z(0) = 0$.

Задача 5. Найдите производные $\varphi^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, 3$, где φ — функция, обратная к функции f в окрестности точки 0 и такая, что $\varphi(0) = 0$. Здесь а) $f(x) = x + x^3 + \sin x$, б) $f(x) = xe^{-x}$.

Задача 6. Существует ли аналитическая функция f , удовлетворяющая соотношению $x^2 f'(x) + (x-1)f(x) + 1 = 0$ и такая, что $f(0) = 1$?