СЕМИНАР 6

Задача 1. Пусть $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно по $x \in M$. а) Докажите, что для всякого подмножества $M' \subset M$ то же равенство имеет место равномерно по $x \in M'$. б) Докажите, что если все функции f_n ограничены (каждая своей константой: $\forall n \exists C_n \forall x \in M\ |f_n(x)| \le C_n$), то функция f тоже ограничена. в) Докажите, что в условиях предыдущей задачи существует $C > 0$ такая, что $\forall n \forall x \in M\ |f_n(x)| \le C$. г) Верны ли утверждения задач 1б и 1в, если сходимость $f_n(x) \to f(x)$ имеет место для всех $x \in M$, но не равномерна?

Задача 2. Пусть $f_n(x) \to f(x)$ и $g_n(x) \to g(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in M$. а) Докажите, что $f_n(x) + g_n(x) \to f(x) + g(x)$ равномерно по $x \in M$. б) Докажите, что $\frac{1}{1+f_n^2(x)} \to \frac{1}{1+f^2(x)}$ равномерно по $x \in M$. в) Пусть все функции f_n и g_n ограничены (каждая своей константой, как в задаче 1б). Докажите, что $f_n(x)g_n(x) \to f(x)g(x)$ равномерно по $x \in M$. г) Покажите, что утверждение пункта 2в перестает быть верным, если не предполагать ограниченности.

Задача 3. Докажите приведенные ниже равенства для всех x, для которых они верны и выясните, является ли сходимость равномерной на указанных подмножествах $\mathbb{R}$. а) $\lim_{n\to\infty} \sin(x/n) = 0$ (подмножества: $[0,1]$, $\mathbb{R}$). б) $\lim_{n\to\infty} n^2x^2 \exp(-n^2x^2) = 0$ (подмножество: $[0,1]$). в) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (подмножество: $(-1,1)$). г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^{2n} x} = \frac{1}{\operatorname{th}^2 x}$ (подмножества: $[1,2]$ и $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (подмножество: $\mathbb{R}$). е) $\lim_{n\to\infty} \sin(x + \frac{1}{n}) = \sin x$ (подмножества: $[0,1]$, $\mathbb{R}$). ж) $\lim_{n\to\infty} \int_x^{x+\frac{1}{n}} \exp(-y^2)\, dy = 0$ (подмножество: $\mathbb{R}$).