

СЕМИНАР 5

Задача 1. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Если да, то сходится ли он абсолютно? а) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, б) $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, в) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$, г) $a_n = \frac{\sin(2\pi n/m)}{\ln n}$, где $m \in \mathbb{N}$, д) $a_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$.

Задача 2. При каких значениях параметров x, α сходится ряд? $x \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, в) ряд Тейлора функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$ в точке $x = a$, г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln n}$, д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$?

Задача 3. Докажите, что последовательность $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ сходится (имеет конечный предел).

Задача 4. Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; $a_n \in \mathbb{R}$. Обязательно ли сходится ряд а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$? б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?