

СЕМИНАР 3

ПРОСТО ИНТЕГРАЛЫ

Задача 1. Найдите а) $\int_0^a |\sin t| dt$ для произвольного a ; б) $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a t^n e^{-t} dt$ при $n = 0, 1, 2$ и произвольном $n \in \mathbb{N}$; в) $\int_0^\pi \sin^3 t dt$, г) $\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^{\pi/2} \frac{\sin t}{1 - \cos t} dt$,

ПЛОЩАДИ, ОБЪЕМЫ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

Задача 2. а) Найдите площадь сегмента круга радиуса R и высотой h . Сравните вычисления для двух сегментов: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, R - h \leq x \leq R\}$ и $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, R - h \leq y \leq R\}$. б) Найдите площадь сектора круга радиуса R с углом φ , то есть фигуры $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq y \leq x \operatorname{tg} \varphi\}$.

Задача 3. Нарисуйте график $y = f(x)$ и найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ и графиком. Является ли полученная функция переменных a и b ограниченной? Вычислите предел этой площади при $b \rightarrow +\infty$ (и фиксированном a). а) $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ ($a, b > 0$); б) $f(x) = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$; в) $f(x) = \frac{|\sin \ln x|}{x}$ ($a, b > 0$).

Задача 4. Найдите а) площадь эллипса с полуосями a и b , б) объем куска эллипсоида вращения высотой h с полуосями a и b , то есть множества $\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, -b \leq z \leq -b + h\}$. На какую глубину погрузится (вертикально) этот эллипсоид в воду, если плотность эллипсоида ρ , а плотность воды 1?

Задача 5. Найдите а) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt$, б) $\int_{-1}^1 (1 - t^2)^{n/2} dt$ для произвольного натурального n .

Задача 6. Найдите а) площадь круга радиуса 1, б) объем трехмерного шара радиуса 1, в) объем четырехмерного шара радиуса 1, г) объем n -мерного шара радиуса 1.

Задача 7. Найдите площадь и центр тяжести сегмента параболы, ограниченного графиком функции $y = x^2$ и прямой $y = a$.

ДИИНЫ КРИВЫХ.

Задача 8. Найдите длину дуги окружности радиуса 1, заключающую угол φ . Сравните два вычисления: дуга окружности это кривая $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \varphi$, и дуга окружности это кривая $y = \sqrt{1 - x^2}, \cos \varphi \leq x \leq 1, y \geq 0$.

Задача 9. Циклоидой называется плоская линия, которую описывает точка на ободе колеса, катящегося без проскальзывания по прямой. Пусть прямая — ось абсцисс, и в начальный момент времени точка находится в начале координат. а) Задайте циклоиду параметрически: $x = f(t), y = g(t)$, где параметр t — угол поворота колеса. Найдите длину отрезка циклоиды, где $0 \leq t \leq T$.

Задача 10. Найдите длину кривой, заданной уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.