

СЕМИНАР 2

Гиперболические функции: $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $\operatorname{th} t = \operatorname{sh} t / \operatorname{ch} t$. Формулы: $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, $\operatorname{ch} 2t = 2 \operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t$, $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t$. Производные: $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$, $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$, $\operatorname{th}' t = 1 / \operatorname{ch}^2 t$.

Задача 1. Для каждой из данных ниже рациональных функций $f(t)$ а) представьте ее в виде суммы элементарных дробей; б) то же самое, вещественных элементарных дробей; в) найдите $\int f(t) dt$; г) разложите f в ряд Тейлора и проверьте результаты пунктов 1а–1в. Функции: $f(t) = \frac{1}{1-t^2}$, $f(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2}$, $f(t) = \frac{1}{1-t^4}$, $f(t) = \frac{1}{1-t^3}$.

Задача 2. Найдите $\int \cos^n t dt$ и $\int \operatorname{ch}^n t dt$ при $n = -1, -2, -3$.

Задача 3. Вычислите $\int \sqrt{1+t^2} dt$ с помощью подстановки а) $t = \operatorname{tg} u$, б) $t = \operatorname{sh} u$, в) $\sqrt{1+t^2} = u + t$, г) $\sqrt{1+t^2} = ut + 1$. Убедитесь, что результат всеми способами получается одинаковый.

Задача 4. То же задание для $\int \sqrt{1-t^2} dt$; подстановки: а) $t = \sin u$, б) $t = \operatorname{th} u$, в) $\sqrt{1-t^2} = 1 - ut$, г) $\sqrt{1-t^2} = t(u - 1)$.

Задача 5. Найдите а) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3t+2}}$, б) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+2}}$.

Задача 6. Найдите а) $\int \frac{dt}{a-\cos t}$, б) $\int \sqrt{t^2+t+a} dt$ при всех $a \in \mathbb{R}$.

Задача 7. Пусть $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t)$ — (вещественные) корни кубического уравнения $x^3 - x + t = 0$. Найдите $\int (x_1(t) - x_2(t))(x_2(t) - x_3(t))(x_3(t) - x_1(t)) dt$