

СЕМИНАР 1

Символ $\int f(t) dt$ означает всю совокупность функций F таких, что $F'(t) = f(t)$ при всех t , при которых f определена (если не указано иное).

Задача 1. Найдите $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(t) dt$ и нарисуйте графики функций f и F . Есть ли среди функций F непрерывные? а) $f(t) = |t|$, б) $f(t) = 1/t$, в) $f(t) = 1/\sqrt{t}$. г) Пусть $\theta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$. Докажите, что не существует функции $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\Theta'(t) = \theta(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f'(t) = \theta(t)$ при всех $t \neq 0$. Есть ли среди этих функций непрерывные?

Задача 2. Найдите а) $\int t^n e^{-t} dt$ для $n = 1, 2$ и произвольного целого $n \geq 0$, б) $\int t^n \ln t dt$ для $n = -1, 0, 1$ и произвольного целого $n \geq 0$, в) $\int t^n \arctg t dt$ для $n = 0, 1$, г) $\int \arcsin t dt$.

Задача 3. а) Найдите $\int t^{2n+1} e^{-t^2} dt$ для произвольного целого $n \geq 0$. б) Выразите $\int t^2 e^{-t^2} dt$ через $\int e^{-t^2} dt$. в) Тот же вопрос для $\int t^4 e^{-t^2} dt$.

Задача 4. Найдите $\int \cos^n t dt$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Задача 5. Найдите а) $\int e^{e^t} e^{e^t} e^t dt$, б) $\int \sqrt{1-t^2} dt$, в) $\int t\sqrt{1-t^4} dt$.