ЛЕКЦИЯ 20

Краткое содержание. Равномерная сходимость степенного ряда в круге сходимости. Дифференцирование степенного ряда.

Теорема 1. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, и пусть $0 < R' < R$. Тогда ряд A сходится абсолютно равномерно в круге $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \le R'\}$.*

Доказательство. Пусть $|x| \le R' < R$; обозначим, как обычно, $A_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$. Предположим для определенности, что $m > k$; тогда $|A_m(x) - A_k(x)| = \left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n x^n\right| \le \sum_{n=k+1}^{m} |a_n| \, |x|^n \le \sum_{n=k+1}^{m} |a_n| (R')^n = B_m - B_k = |B_m - B_k|$, где $B_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{k} |a_n| (R')^n$; аналогично при $m < k$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (R')^n$ абсолютно сходится (поскольку $R' < R$), откуда вытекает, что последовательность B_k фундаментальна: $\lim_{m,k\to\infty} |B_m - B_k| = 0$. Из леммы о двух полицейских и доказанного выше неравенства $0 \le |A_m(x) - A_k(x)| \le |B_m - B_k|$ вытекает, что последовательность $A_k(x)$ равномерно фундаментальна: $|A_m(x) - A_k(x)| \rightrightarrows 0$ при $m, k \to \infty$ равномерно по $x \in \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \le R'\}$. Отсюда вытекает, что последовательность $A_k(x)$ равномерно сходится к своему пределу при $k \to \infty$ — доказательство этого такое же, как и обычной теоремы о том, что фундаментальная последовательность сходится. □

Производной степенного ряда $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется степенной ряд $A' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Подчеркнем, что здесь речь идет не о *сумме* ряда — т.е. о функции переменной x — а о самом ряде, т.е. о последовательности функций $A_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; сумма (если существует) является пределом этой последовательности при $k \to \infty$.

Напомним, что ряд A абсолютно сходится в круге $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}$ для некоторого $R \in [0, +\infty]$, называемого радиусом сходимости.

Предложение 1. *Радиус сходимости степенного ряда и его производной совпадают.*

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда A, а R' — производной A'. Из определения радиуса сходимости как точной верхней грани множества $\{\, |x| \mid A(x)$ абсолютно сходится$\}$ следует, что R' — также радиус сходимости ряда $xA' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$. Согласно формуле Адамара, $\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|a_n|}$.

Лемма 1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Доказательство. В силу формулы бинома Ньютона для каждого $\varepsilon > 0$ и произвольного n имеет место неравенство $(1+\varepsilon)^n \ge \varepsilon^2 \frac{n(n-1)}{2}$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \varepsilon^2 \frac{n(n-1)}{2n} = +\infty$, существует N такое, что при $n > N$ имеет место неравенство $\varepsilon^2 \frac{n(n-1)}{2} \ge n$, откуда при тех же самых n имеет место двойное неравенство $1 \le \sqrt[n]{n} \le 1 + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное, это и означает, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □

Из леммы вытекает (почему?), что $\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ по той же формул Адамара, примененной к ряду A. □

Пусть $P = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен от одной переменной. Тогда функция $\mathcal{D}_P(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(y)-P(x)}{y-x} = p_1 + p_2(x+y) + \dots + p_n(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1})$ — многочлен от двух переменных и, следовательно, непрерывна при всех $x, y \in \mathbb{C}$; очевидно, $\mathcal{D}_P(x,x) = P'(x)$.

Следствие 1 (предложения 1). *Пусть A — степенной ряд, R — его радиус сходимости, и $R' < R$. Тогда выражение $\mathcal{D}_{A_k}(x,y) \stackrel{def}{=} \frac{A_k(y)-A_k(x)}{y-x}$ сходится при $k \to \infty$ абсолютно и равномерно на множестве $\{(x,y) \mid |x|, |y| \le R'\}$ к $\mathcal{D}_A(x,y)$, где $A(x)$ — сумма ряда A.*

Доказательство. $|\mathcal{D}_{A_m} - \mathcal{D}_{A_k}| \le \sum_{n=k+1}^{m} |a_n| (|y|^{n-1} + |y|^{n-2} |x| + \dots + |x|^{n-1}) \le \sum_{n=k+1}^{m} n\,|a_n| (R')^{n-1}$. Согласно предложению 1, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (R')^{n-1}$ абсолютно сходится. Дальнейший ход рассуждений такой же, как в доказательстве теоремы 1. □

Теорема 2. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда A, и пусть $|x| < R$. Тогда сумма $A(x)$ ряда — функция, имеющая производную в точке x, и эта производная равна сумме ряда $A'(x)$.*

Доказательство. Пусть $x \in (-R, R) \subset \mathbb{R}$; выберем $R' > 0$ такое, что $|x| \le R' < R$. Согласно следствию 1, $\mathcal{D}_{A_k}(x,y) \rightrightarrows \mathcal{D}_A(x,y)$ при $k \to \infty$ равномерно на множестве $\{(x,y) \mid |x|, |y| \le R'\}$. Отсюда и из теоремы 1 лекции 19 следует, что $\lim_{y\to x} \mathcal{D}_A(x,y) = \lim_{y\to x} \lim_{k\to\infty} \mathcal{D}_{A_k}(x,y) = \lim_{(y,k)\to(x,\infty)} \mathcal{D}_{A_k}(x,y) = \lim_{k\to\infty} \lim_{y\to x} \mathcal{D}_{A_k}(x,y) = \lim_{k\to\infty} A_k'(x) = A'(x)$, что и есть утверждение теоремы. □

Следствие 2. *Сумма* $A(x)$ *степенного ряда* A *— бесконечно дифференцируемая (имеющая производные всех порядков) функция на интервале* $(-R, R)$, *где* R *— радиус сходимости. Степенной ряд* A *является ее рядом Тейлора.*