ЛЕКЦИЯ 19

Краткое содержание. Метрическое пространство. Равномерная сходимость, перестановка переходов к пределу.

Метрическим пространством называется множество M, снабженная функцией $\varrho : M^2 \to \mathbb{R}$ (*метрика*, или *расстояние*), обладающей следующими свойствами:

1) $\varrho(a,b) \ge 0$ для всех $a,b \in M$, при этом $\varrho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
2) (симметрия) $\varrho(b,a) = \varrho(a,b)$ для всех $a,b \in M$.
3) (неравенство треугольника) $\varrho(a,c) \le \varrho(a,b) + \varrho(b,c)$ для всех $a,b,c \in M$.

Шаром радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in M$ называется множество $B_R(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \varrho(a,x) < R\}$.

В метрическом пространстве существует каноническая структура топологического пространства:

Теорема 1. *Метрическое пространство, в котором окрестностями всякой точки a называются шары с центром a (произвольного радиуса), является хаусдорфовым топологическим пространством.*

Доказательство. Проверим свойства окрестностей в хаусдорфовом пространстве.

1. Всякий шар $B_R(a)$ содержит свой центр: $\varrho(a,a) = 0 < R$, так что $a \in B_R(a)$. Следовательно, каждая точка M обладает окрестностью.

2. Пусть $a \in B_{R_1}(a_1) \cap B_{R_2}(a_2)$, и пусть $R > 0$ таково, что $R < R_1 - \varrho(a,a_1)$ и $R < R_2 - \varrho(a,a_2)$. Если $c \in B_R(a)$, то $\varrho(c,a_1) \le \varrho(c,a) + \varrho(a,a_1) < R + \varrho(a,a_1) < R_1$ и аналогично $\varrho(c,a_2) < R_2$. Следовательно, $c \in B_{R_1}(a_1) \cap B_{R_2}(a_2)$, то есть $B_R(a) \subset B_{R_1}(a_1) \cap B_{R_2}(a_2)$.

3. Пусть $a \ne b$, и пусть $R > 0$ таково, что $R < \varrho(a,b)/2$. Тогда если $c \in B_R(a) \cap B_R(b)$, то $\varrho(a,b) > 2R > \varrho(a,c) + \varrho(b,c)$ — нарушение неравенства треугольника; таким образом, $B_R(a) \cap B_R(b) = \varnothing$. □

Пример 1. Формула $\varrho(s,t) = |s-t|$ задает метрику на пространстве $\mathbb{R}$ (проверьте!). Шар $B_R(a) = (a-R, a+R)$, откуда вытекает, что топология, порожденная метрикой, совпадает со стандартной топологией $\mathbb{R}$.

Понятие метрического пространства достаточно подробно изучается в курсе топологии.

Пусть теперь X — топологическое пространство, $A \subset X$, Y, M — метрические (с метриками ϱ_Y, ϱ_M), $f : A \times Y \to M$, $F : A \to M$ и $\varphi : A \to Y$ — отображения. Говорят, что $f(x,y)$ сходится к $F(x)$ при $y \to \varphi(x)$ равномерно по $x \in A$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in A$ и всякого y такого, что $0 < \varrho_Y(y, \varphi(x)) < \delta$, имеет место равенство $\varrho_M(f(x,y), F(x)) < \varepsilon$. Обозначение: $f(x,y) \rightrightarrows_A F(x)$ при $y \to \varphi(x)$.

Очевидно, если $f(x,y) \rightrightarrows_A F(x)$ при $y \to \varphi(x)$, то $f(x,y) \to F(x)$ при $y \to \varphi(x)$ при любом $x \in A$. Обратное неверно:

Пример 2. Пусть $X = [0,1]$, $Y = \overline{\mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, $M = \mathbb{R}$. Метрика (и топология) в $\mathbb{R}$ стандартная: $\varrho_Y(s,t) = |s-t|$, а топология Y порождается метрикой $\varrho_Y(m,n) = |f(m) - f(n)|$, где $f : \overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ — отображение, заданное формулой $f(k) = 1/k$ при $k \in \mathbb{N}$, и $f(+\infty) = 0$ (ϱ_Y — метрика, поскольку $|s-t|$ — метрика; уточните это рассуждение!).

Пусть $\varphi(x) = +\infty$ для всех $x \in [0,1]$, а $f : [0,1] \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ задается формулами $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \le x \le 1/n, \\ 0, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$.

Тогда для каждого $x \in [0,1]$ имеет место равенство $f_n(x) \to F(x)$ при $n \to +\infty$, где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le 1 \end{cases}$.

Сходимость в данном случае неравномерная: докажем, что для всякого N существуют $n > N$ и $x \in [0,1]$ такие, что $|f_n(x) - F(x)| \ge 1/2$. Для этого достаточно взять произвольное n и $x = 1/(2n)$; тогда $f_n(x) = 1/2$ и $F(x) = 0$.

Теорема 2. *1) Пусть $a \in X$, $b \in Y$, $f(x,y) \to F(x)$ при $y \to \varphi(x)$, $\varphi(x) \to b$ при $x \to a$ и $F(x,y) \to \Phi$ при $(x,y) \to (a,b)$. Тогда $F(x) \to \Phi$ при $x \to a$.*

2) Пусть $a \in X$, $b \in Y$, $f(x,y) \rightrightarrows_A F(x)$ при $y \to \varphi(x)$, $\varphi(x) \to b$ при $x \to a$ и $F(x) \to \Phi$ при $x \to a$. Тогда $\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) = \Phi$.

Доказательство. Первое утверждение: равенство $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \Phi \in M$ означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и окрестность $U(a) \subset X$ такие, что если $x \in U(a)$ и $\varrho_Y(y,b) < \delta$ (но $(x,y) \neq (a,b)$), то $\varrho_M(f(x,y),\Phi) < \varepsilon/2$.

Поскольку $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$, существует окрестность $V(a)$ такая, что если $x \in V(a)$, то $\varrho_Y(\varphi(x),b) < \delta/2$. Если при этом взять y такое, что $\varrho_Y(y,b) < \delta/2$, то $\varrho_Y(y,\varphi(x)) < \delta$ по неравенству треугольника и, следовательно, $\varrho_M(f(x,y),\Phi) < \varepsilon/2$.

С другой стороны для всякого $x \in V(a) \setminus \{a\}$ существует $\delta' > 0$ такое, что если $0 < \varrho_Y(y,\varphi(x)) < \delta'$, то $\varrho_M(f(x,y),F(x)) < \varepsilon/2$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta' = \delta$ (почему?). Следовательно, для всякого $x \in V(a)\setminus\{a\}$ по неравенству треугольника имеет место $\varrho_M(F(x),\Phi) < \varepsilon$, что и означает сходимость $\lim_{x\to a} F(x) = \Phi$.

Второе утверждение: рассмотрим $\varepsilon > 0$. Из равенства $\lim_{x\to a} F(x) = \Phi$ вытекает, что существует окрестность $U(a)$ такая, что если $x \in U(a) \cap A \setminus \{a\}$, то $\varrho_M(F(x),\Phi) < \varepsilon/2$. С другой стороны, в силу равномерной сходимости $f(x,y) \rightrightarrows F(x)$ при $y \to \varphi(x)$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x \in U(a)\cap A\setminus$ и $0 < \varrho_Y(y,\varphi(x)) < \delta$, то $\varrho_M(f(x,y),F(x)) < \varepsilon/2$. Из неравенства треугольника вытекает, что в этом случае $\varrho_M(f(x,y),\Phi) < \varepsilon$, что и означает сходимость $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \Phi$. □

Следствие 1. *Пусть Y, M — метрические пространства, X — топологическое, $A \subset X$, $\varphi : X \to Y$ — отображение, непрерывное в точке $z \in X$, $f : X \times Y \to M$ — отображение, непрерывное по первому аргументу в каждой точке. Пусть $f(x,y) \rightrightarrows_A F(x)$ при $y \to \varphi(x)$. Тогда F непрерывно в точке z.*

Доказательство. $\lim_{x\to z} F(x) = \lim_{x\to z} \lim_{y\to\varphi(x)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(z,\varphi(z))} f(x,y)$ в силу утверждения 2 теоремы 2 $= \lim_{y\to\varphi(z)} \lim_{x\to z} f(x,y)$ в силу утверждения 1 теоремы 2 $= \lim_{y\to\varphi(z)} f(z,y)$ поскольку f непрерывна по первому аргументу $= F(z)$, что и означает непрерывность F в точке z. □

Пример 3. Пусть X — произвольное пространство, $Y = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (с топологией подмножества в $\overline{\mathbb{R}}$), M — любое метрическое пространство, $\varphi(x) \equiv +\infty$. Отображение φ непрерывно (поскольку постоянно); тогда получается такое утверждение: пусть $f_n : X \to M$ — последовательность непрерывных отображений, равномерно сходящаяся (при $n \to \infty$) к отображению $f : X \to M$. Тогда f непрерывно.

Условие равномерности здесь существенно, как показывает пример 2 (в нем предельная функция $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ разрывна в точке 0). Вот еще один пример: пусть $X = [0,1]$ и $f_n(x) = x^n$, $n = 0,1,\dots$. Тогда $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ при $x = 1$ и 0 при всех $x < 1$. Согласно следствию 1, сходимость последовательности не является равномерной. Чтобы убедиться в этом напрямую, докажем лемму:

Лемма 1. $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = \exp(x)$.

Доказательство. $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n = \exp\bigl(\lim_{n\to\infty} n\frac{\ln(1+x/n)}{n}\bigr) = \exp\bigl(\lim_{n\to\infty} x\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\bigr) = \exp\bigl(x \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}\bigr) = \exp(x)$. □

Пусть сходимость $f_n(x) \to F(x)$ равномерная. Тогда согласно утверждению 2 теоремы 2 для всякой последовательности $a : \mathbb{N} \to [0,1]$ такой, что $\lim_{m\to\infty} a_m = a$, имеет место сходимость $\lim_{m,n\to\infty} f_n(a_m) = F(a)$; отсюда следует, в частности, что $\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = F(a)$ (почему?).

Положим теперь $a_n = 1 - 1/n$, так что $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Согласно лемме 1, $\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n = 1/e \neq 1 = f(1)$ — следовательно, сходимость $f_n \to F$ неравномерная.