ЛЕКЦИЯ 18

Краткое содержание. Круг сходимости степенного ряда.

Выражение $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, где $z \in \mathbb{C}$ и $a_n \in \mathbb{C}$ при всех n называется степенным рядом.

Теорема 1. *Пусть степенной ряд $A(z)$ сходится при некотором z, и пусть $|w| < |z|$. Тогда ряд $A(w)$ абсолютно сходится.*

Отметим, что для справедливости теоремы *абсолютная* сходимость ряда $A(z)$ не требуется!

Доказательство. Обозначим $A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$; тогда из сходимости этой последовательностим вытекает, что $a_n z^n = A_n(z) - A_{n-1}(z) \to 0$ при $n \to \infty$ и, в частности, существует константа $C > 0$ такая, что $|a_n z^n| < C$ при всех n.

Обозначим $B_n(w) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, |w|^k$, и пусть $x \stackrel{\text{def}}{=} |w| / |z| < 1$. Пусть $n > m$; тогда $0 < B_n(w) - B_m(w) = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \, |w|^k = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k z^k| \, x^k \le C \sum_{k=m+1}^{n} x^k = C \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x} < C \frac{x^m}{1-x}$. Поскольку $x < 1$, $\lim_{m,n\to\infty} x^m = 0$, отсюда по лемме о двух полицейских вытекает, что $\lim_{m,n\to\infty}(B_n(w) - B_m(w)) = 0$, то есть последовательность $B_n(w)$ фундаментальна. Следовательно, она сходится. $\square$

Пример 1. Из теоремы 1 и примера 2 лекции 17 вытекает, в частности, что ряд Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ абсолютно сходится (и, следовательно, сходится) при всех $-1 < x < 1$. Действительно, для всякого такого x существует $y \in (0,1)$ такое, что $|x| < y$. Как было доказано в примере 2 лекции 17, ряд Тейлора в точке y сходится — следовательно, ряд Тейлора в точке x абсолютно сходится. Имеющихся в нашем распоряжении средств, однако, недостаточно, чтобы доказать, что сумма ряда при $-1 < x \le 1/2$ равна $(1+x)^\alpha$ (для $-1/2 < x < 1$ см. тот же пример 2 лекции 17).

Следствие 1 (теоремы 1). *Для любого степенного ряда $A(z)$ существует число $R \in [0, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ такое, что при $|z| < R$ ряд абсолютно сходится, а при $|z| > R$ — расходится.*

Доказательство. Возьмем $R \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{ |z| \mid A(z) \text{ сходится.}\}$. $\square$

Множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ называется кругом сходимости степенного ряда $A(z)$, а число R — радиусом сходимости. Следствие ничего не говорит о сходимости степенного ряда в случае, когда z лежит на границе круга сходимости, и действительно, для разных степенных рядов ситуация со сходимостью на границе разная.

Пример 2. Как было доказано ранее, степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ (геометрическая прогрессия) сходится при всяком $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Если $|z| > 1$, то $\lim_{n\to\infty} |z^n| = \lim_{n\to\infty} |z|^n = \infty$, а если $|z| = 1$, то предел, очевидно, равен 1. В обоих случаях z^n не стремится к 0 при $n \to \infty$ и, следовательно, ряд расходится. Таким образом, радиус сходимости ряда равен 1, и во всех точках границы ряд расходится.

Лемма 1. *Пусть $A = a_1 + a_2 + \dots$ и $B = b_1 + b_2 + \dots$ — ряды, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}^m$ (с произвольным m) и $|a_k| \le |a_k|$ для всех k. Тогда если ряд B абсолютно сходится, то и A абсолютно сходится.*

Доказательство. Пусть $A_n \stackrel{\text{def}}{=} |a_1| + \dots + |a_n|$, и аналогично B_n. Тогда $|A_n - A_m| = |a_{m+1}| + \dots + |a_n| \le |b_{m+1}| + \dots + |b_n| = |B_n - B_m|$. Поскольку B абсолютно сходится, $\lim_{m,n\to\infty} |B_n - B_m| = 0$, откуда по лемме о двух полицейских $\lim_{m,n\to\infty} |A_n - A_m| = 0$. Следовательно, A абсолютно сходится. $\square$

Пример 3. Пусть $|z| \le 1$, и $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Пусть $k > 1$; тогда $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Ряд $B = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots$ сходится, поскольку его частичная сумма $B_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ при $n \to \infty$. Из леммы 1 вытекает, что $A(1)$ (абсолютно) сходится. Из той же леммы вытекает, что при $|z| \le 1$ ряд $A(z)$ абсолютно сходится (и, следовательно, сходится).

При $|z| > 1$ имеем $\lim_{n\to\infty} |z^n|/n = +\infty$, откуда вытекает, что $A_n(z)$ расходится. Тем самым радиус сходимости ряда равен 1, но во всех точках границы круга сходимости ряд абсолютно сходится.

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $f : A \to \mathbb{R}$ — функция, $a \in X$ — точка. Верхним пределом функции в точке a называется число $\limsup_{x\to a} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\sup\{f(x) \mid x \in U \cap A, x \ne a\} \mid U \subset X$— открытое, $a \in U\}$. Аналогично (с перестановкой inf и sup) определяется нижний предел (обозначение $\liminf_{x\to a} f(x)$.

Лемма 2. *Если* $\lim_{x\to a} f(x) = u$, *то* $u = \limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to\to a} f(x)$.

Доказательство. Для произвольного непустого множества $U \subset X$ имеет место неравенство $\inf\{f(x) \mid x \in U \cap A, x \neq a\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in U \cap A, x \neq a\}$. Если $U_1, U_2 \subset X$ открыты и $a \in U_1, U_2$, то $U \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_1 \cap U_2$ открыто и непусто. Отсюда $\inf\{f(x) \mid x \in U_1 \cap A, x \neq a\} \leq \inf\{f(x) \mid x \in U \cap A, x \neq a\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in U \cap A, x \neq a\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in U_2 \cap A, x \neq a\}$. Отсюда вытекает (почему?), что $\liminf_{x\to a} f(x) \leq \limsup_{x\to a} f(x)$.

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $U \ni a$ такое, что если $x \in U$, $x \neq a$, то $u - \varepsilon < f(x) < u + \varepsilon$ — следовательно, $u - \varepsilon \leq \sup\{f(x) \mid x \in U, x \neq a\} \leq u + \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $\limsup_{x\to a} \leq u + \varepsilon$ и $u - \varepsilon \leq \liminf_{x\to a}$. Но из доказанного выше получается, что верхний и нижний пределы удовлетворяют неравенствам $u - \varepsilon \leq \liminf_{x\to a} \leq \limsup_{x\to a} \leq u + \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$, откуда и вытекает утверждение леммы. □

Теорема 2. *Пусть* $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— степенной ряд. Тогда радиус его круга сходимости равен* $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Доказательство. Пусть $|z| < 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; тогда найдется $\varepsilon > 0$ и N такое, что $\sup\{\sqrt[n]{|a_n|} \mid n > N\} < (1-\varepsilon)/|z|$, откуда для любого $n > N$ выполнено неравенство $|a_n z^n| < (1-\varepsilon)^n$. Поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\varepsilon)^n$ (геометрическая прогрессия) абсолютно сходится, ряд $A(z)$ также абсолютно сходится.

Пусть теперь $|z| > 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и произвольного N выполнено неравенство $\sup\{\sqrt[n]{|a_n|} \mid n > N\} \geq \sqrt[n]{1-\varepsilon}/|z|$, то есть найдется $n > N$ такое, что $|a_n z^n| \geq 1 - \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $a_n z^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$ и, следовательно, ряд $A(z)$ расходится. □

Теорема 3. *Пусть* $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— степенной ряд. Если предел* $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ *существует, то он равен радиусу сходимости ряда.*

Доказательство. Если $|z| < \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$, то найдется $\varepsilon > 0$ и N такое, что $|a_{n+1} z^{n+1}| < (1-\varepsilon)\,|a_n z^n|$ при всех $n \geq N$ и, следовательно, $|a_n z^n| \leq |a_N z^N|\,(1-\varepsilon)^{n-N}$. Поскольку ряд $\sum_{n=N}^{\infty}(1-\varepsilon)^{n-N}$ (геометрическая прогрессия) абсолютно сходится, ряд $A(z)$ также абсолютно сходится.

Если $|z| > \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$, то найдется $\varepsilon > 0$ и N такое, что $|a_{n+1} z^{n+1}| > (1+\varepsilon)\,|a_n z^n|$ при всех $n \geq N$ и, следовательно, $|a_n z^n| \leq |a_N z^N|\,(1+\varepsilon)^{n-N}$. Поскольку $\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon)^{n-N} = +\infty$, имеем $\lim_{n\to\infty} |a_n z^n| = +\infty \neq 0$, так что ряд $A(z)$ расходится. □