ЛЕКЦИЯ 17

Краткое содержание. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть $a > 0$ и $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая производные во всех точках до порядка $n+1$ включительно. Тогда для любого $x \in (-a, a)$ существует точка $\xi \in [0, x]$ (или $[x, 0]$) такая, что* $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$.

Для доказательства нам понадобятся две леммы:

Лемма 1 (теорема Коши о промежуточной точке)**.** *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, и функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируемы во всех точках отрезка $[a, b]$, причем $g(a) \neq g(b)$. Тогда существует число $\xi \in [a, b]$ такое, что* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

При $g \equiv 1$ получается частный случай теоремы Коши — теорема Лагранжа.

Геометрический смысл теоремы Коши такой: рассмотрм плоскую кривую — отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, заданную формулой $\gamma(t) = (f(t), g(t))$. Тогда $\gamma'(t) = (f'(t), g'(t))$, и теорема Коши означает, чтон найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что касательная к образу кривой γ в точке $\gamma(\xi)$ параллельна хорде, соединяющей концы кривой γ — точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Доказательство теоремы Коши. Рассмотрим вспомогаельную функцию $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, заданную формулой $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Она дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$ и $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. По теореме Ролля существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$. □

Лемма 2. *Пусть $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая во всех точках производные до порядка $n + 1$ включительно, причем $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. Тогда для каждого $x \in (-a, a)$ существует $\xi \in [0, x]$ (или $[x, 0]$) такое, что* $f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$.

Доказательство. Рассмотрим функции f и $g(t) = t^{n+1}$. Поскольку они обе равны нулю в точке 0, теорема Коши на отрезке $[0, x]$ для них дает $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}$ для некоторого $\xi_1 \in [0, x]$ (или $[x, 0]$). Та же формула Коши для функций f' и $(t^{n+1})' = (n + 1)t^n$ (обе равны нулю в нуле) на отрезке $[0, \xi_1] \subset [0, x]$ (или $[\xi_1, 0] \subset [x, 0]$) дает $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f'(\xi_1}{(n+1)\xi_1^n} = \frac{f''(\xi_2}{(n+1)n\xi_2^{n-1}}$ для некоторого $\xi_2 \in [0, \xi_1] \subset [0, x]$. Повторяя ту же процедуру $(n + 1)$ раз, получим утверждение теоремы, где $\xi = \xi_{n+1}$. □

Доказательство теоремы 1. Функция $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - (f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2 (ср. с доказательством формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). □

Пример 1. Пусть $f(x) = \exp(x)$. Тогда $f^{(n)}(x) = \exp(x)$, так что теорема 1 утверждает, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ найдется $\xi(x) \in [0, x]$ такое, что $\exp(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \exp(\xi(x))\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$; последний член обозначим $R_n(x)$. Поскольку exp на действительной оси — возрастающая функция, имеем $R_n(x) \leq \exp(x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ при $x > 0$ и $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Лемма 3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ *для любого $a \in \mathbb{C}$.*

Доказательство леммы. Зафиксируем натуральное число $N > 2|a|$. Тогда для всякого $n > N$ имеем $|a/n| < 1/2$, откуда $|\frac{a^n}{n!}| = |\frac{a^N}{N!}| \cdot |a/(N + 1)| \cdot \dots \cdot |a/n| < \frac{2^N a^N}{N!} \cdot \frac{1}{2^n}$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, лемма вытекает из леммы о двух полицейских. □

Тем самым из леммы о двух полицейских вытекает, как при $x > 0$, так и при $x < 0$, что $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, т.е. $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. С другой стороны, это и раньше было известно — это определение экспоненты. Аналогично доказываются (и тоже не являются новыми…) утверждения $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ и $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Пример 2. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, а $x > -1$ (действительное число). Тогда $f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$. Тогда теорема 1 утверждает, что существует функция $\xi : (-1,+\infty) \to (-1,+\infty)$ такая, что $0 < \xi(x) \le x$ при $x > 0$ и $x \le \xi(x) \le 0$ при $x < 0$ и $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi(x))^{\alpha-n-1}x^{n+1}$; последний (остаточный) член обозначим $R_n(x)$.

Пусть теперь $0 \le x < 1$ (и, следовательно, $0 \le \xi(x) < 1$); тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $0 \le x < \frac{1}{1+\varepsilon}$. Из равенства $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha-n+1}{n} = -1$ следует, что существует N такое, что $\left|\frac{\alpha-n+1}{n}\right| < 1 + \varepsilon/2$ при всех $n > N$. Кроме того, $\xi > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\xi} < 1$, а также $|(1+\xi)^\alpha| = |\exp(\alpha \ln(1+\xi))| = \exp(\ln(1+\xi)\operatorname{Re}(\alpha))$ (см. доказательство предложения 4 лекции 9) $= (1+\xi)^{\operatorname{Re}\alpha} < \max(2^{\operatorname{Re}\alpha}, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\alpha)$.

Следовательно, при $n > N$ верно неравенство $0 < |R_n(x)| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-N)}{(N+1)!}\right| \cdot |(1+\xi(x))^\alpha| \cdot \left|\frac{\alpha-N-1}{N+2}\right| \cdot \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1} < \left|\frac{\alpha\dots(\alpha-N)}{(N+1)!}\right| \mu(\alpha)\frac{1}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon/2)^N} \cdot \left(\frac{1+\varepsilon/2}{1+\varepsilon}\right)^n$. Обозначим C_N первый сомножитель (он от n не зависит!), и $u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+\varepsilon/2}{1+\varepsilon}$; тогда $0 < u < 1$ и, следовательно, $C_N u^n \to 0$ при $n \to \infty$. По лемме о двух полицейских из неравенства $0 < |R_n(x)| < C_N u^n$ вытекает, что $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, так что $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$ (формула бинома Ньютона) для всех $x \in [0,1)$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{C}$.

Пусть теперь $-1/2 < x \le 0$. Тогда $-1/2 \le \xi(x) \le 0$, откуда $1/2 \le 1+\xi(x) \le 1$ и $\left|\frac{1}{1+\xi(x)}\right| \le 2$. Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\left|\frac{x}{1+\xi(x)}\right| \le 2|x| < 1-\varepsilon$. Выберем, как выше, N такое, что $\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon/2}$ при $n > N$. Аналогично предыдущему случаю доказывается неравенство $|(1+\xi)^\alpha| \le \max(1, 2^{-\operatorname{Re}\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\alpha)$. Отсюда получим $|R_n(x)| < \nu(\alpha)C_N\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\right)^n \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\alpha)C_N v^n$. Поскольку $0 < v < 1$, получаем $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ аналогично случаю $0 < x < 1$.

Выражение $\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ называют рядом Тейлора функции f; разумеется, ряд Тейлора существует только у функций, имеющих (по крайней мере, в точке 0) производные всех порядков — их называют бесконечно дифференцируемыми. Так, в примере 1 доказано, что ряд Тейлора экспоненты совпадает с рядом, определяющим экспоненту и сходится при всех $z \in \mathbb{R}$ (на самом деле он сходится при всех $z \in \mathbb{C}$), причем сумма равна экспоненте. В примере 2 доказано, что при $-1/2 < x < 1$ ряд Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ сходится к этой функции. На самом деле это верно для всех $-1 < x < 1$, но формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (теорема 1) не позволяет этого доказать. Этот недостаток можно было бы исправить, доказав формулы Тейлора с другими формами остаточного члена (Коши, Шлемильха–Роша, интегральным), но мы предпочтем отложить этот вопрос до курса комплексного анализа, где сходимость будет доказана намного проще.