ЛЕКЦИЯ 16

Краткое содержание. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть f — дифференцируемая вектор-функция одной переменной. Ее производная $f'(x)$ зависит от точки x, так что тоже представляет собой вектор-функцию одной переменной. Ее производная (если существует) называется второй производной функции f и обозначается $f''(x)$. Аналогично определяется третья $f'''(x)$, четвертая $f^{IV}(x)$ и т.д. производная, и (по индукции) производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ при любом натуральном n. Нулевой производной считается сама функция: $f^{(0)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$.

Обозначение. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, $g : A \to \mathbb{R}$ — функция, $a \in X$. Запись $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ означает $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (имеется в виду нулевой вектор $0 \in \mathbb{R}^n$). В частности, $f(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Записи типа "$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$" используются как сокращение от "$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \omega(x)$, где $\omega(x) = o(x)$ при $x \to 0$".

Пример 1. Определение $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ эквивалентно $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ при $x \to a$.

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $a > 0$ и $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая производные во всех точках до порядка n включительно. Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$ при $x \to 0$. Обратно, если f имеет производные до порядка n включительно и $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$, то $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ для всех $k = 0, \dots, n$.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нам понадобятся две леммы:

Лемма 1. *Для всякого $k \in \mathbb{R}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $(x^k)^{(m)} = k(k-1)\dots(k-m+1)x^{k-m}$. Если $k \in \mathbb{N}$ и $m > k$, то $(x^k)^{(m)} = 0$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *Пусть $a > 0$ и $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая производные во всех точках до порядка n включительно, причем $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. Тогда $f(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$.*

Доказательство леммы 2. Индукция по n: база $n = 1$ — определение производной (ср. пример 1). Пусть теперь для производных порядка $n-1$ лемма доказана. Функция $g(x) = f'(x)$ удовлетворяет условиям леммы порядка $n-1$ — следовательно, $g(x) = o(x^{n-1})$ при $x \to 0$. По теореме Лагранжа $f(x) = g(\xi)x$ для некоторого $\xi(x)$, $0 \le \xi(x) \le x$. Тогда $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{g(\xi(x)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{g(\xi(x)}{\xi(x)^{n-1}} \cdot \left(\frac{\xi(x)}{x}\right)^{n-1} \right)$. Первый сомножитель здесь стремится к нулю по предположению индукции, второй не превосходит 1 по модулю. Следовательно, предел равен 0 и шаг индукции выполнен. □

Пусть теперь f — функция, имеющая n производных на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда для функции $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ имеем $g^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{(n-m)!} f^{(k+m)}(0)x^{n-m}$. При подстановке $x = 0$ не обращается в нуль только первый член суммы (при $k = m$), откуда $g^{(m)}(0) = f^{(m)}(0) - f^{(m)}(0) = 0$. Следовательно, g удовлетворяет условиям леммы 2, так что $g(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ — первое утверждение доказано.

Второе утверждение теоремы вытекает из леммы:

Лемма 3. *Если P — многочлен степени не выше n и $P(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$, то все коэффициенты многочлена P равны нулю.*

Доказательство леммы 3. Пусть $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$, и пусть $k \le n$ — наименьшее число, для которого $p_k \ne 0$. Если $k = n$, то $\lim_{x\to 0} P(x)/x^n = p_n \ne 0$. Если $k < n$, то $\lim_{x\to 0} P(x)/x^k = p_k \ne 0$, откуда $\lim_{x\to 0} P(x)/x^n = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{x^k} \frac{1}{x^{n-k}} = \infty$. В обоих случаях предел не равен нулю, что противоречит условиям леммы. □

Следствие 1 (леммы 3). *Если многочлен (с действительными или комплексными коэффициентами) равен нулю при всех действительных значениях переменной, то все его коэффициенты равны нулю.*

Действительно, в этом случае $P(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ для любого n.

Пусть теперь f имеет производные до порядка n включительно и $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$. Согласно доказанному выше первому утверждению теоремы, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$, откуда $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} - a_k \right) x^k = o(x^n)$. Из леммы 3 вытекает теперь, что $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ для всех $k = 0, \dots, n$. □

Пример 2. Как известно, $\exp'(x)=\exp(x)$, откуда $\exp^{(n)}(x)=\exp(x)$ для любого n, и $\exp^{(n)}(0)=\exp(0)=1$. Следовательно, $\exp(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)=1+x+x^2/2+x^3/6+\dots+x^n/n!+o(x^n)$ при $x\to 0$ для любого n. Отсюда $\cos x=\frac{1}{2}(\exp(ix)+\exp(-ix))=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(i^k+(-i)^k)x^k+o(x^n)$. Очевидно, $i^k+(-i)^k=0$ при нечетном k и $i^{2m}+(-i)^{2m}=2(-1)^m$ при четном $k=2m$. Отсюда получается $\cos x=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2n+1})=1-x^2/2+x^4/24-\dots+(-1)^nx^{2n}/(2n)!+o(x^{2n+1})$ при $x\to 0$ для любого n. Аналогично, $\sin x=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(x^{2n+2})=x-x^3/6+x^5/120-\dots+(-1)^nx^{2n+1}/(2n+1)!+o(x^{2n+2})$ при $x\to 0$ для любого n.

Пример 3. Пусть $u(x)=x^k$ при $k\in\mathbb{Z}$ (включая случай $k<0$!). Тогда $u(x)=\exp(k\ln x)$, откуда $u'(x)=\exp(k\ln x)\cdot k\ln' x=kx^k/x=kx^{k-1}$. По индукции получаем $(x^k)^{(n)}=k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$ для всех целых k и целых неотрицательных n.

$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$, откуда $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=(-1)\cdot\dots\cdot(-n)(1+x)^{-(n+1)}=(-1)^nn!(1+x)^{-(n+1)}$. Следовательно, $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(0)=(-1)^nn!$, откуда $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^nx^n+o(x^n)$ при $x\to 0$ для любого n.

Пример 4. Пусть f имеет производные до n-го порядка включительно, и $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+o(x^n)$ при $x\to 0$. Согласно теореме 1 (второе утверждение), $a_k=f^{(k)}(0)k!$. Тогда $g^{(k)}(0)=f^{(k+1)}(0)=(k+1)a_{k+1}$. Отсюда и из первого утверждения теоремы 1 получаем $g'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}g^{(k)}(0)/k!x^k+o(x^{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k+o(x^{n-1})=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots+na_nx^{n-1}+o(x^{n-1})$ для произвольного n при $x\to 0$.

Пусть $f(x)=\operatorname{arctg}x$, тогда $g(x)=f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Согласно примеру 3, $g(x)=1-x^2+x^4+\dots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n+1})$ для всех n при $x\to 0$. Тогда $\operatorname{arctg}x=x-x^3/3+x^5/5-\dots+(-1)^nx^{2n+1}/(2n+1)+o(x^{2n+2})$ для всех n при $x\to 0$.

Пример 5. В этом примере все пределы берутся при $x\to 0$. Согласно примеру 2, $\exp(x)=1+x+x^2/2+o(x^2)=1+x+o(x)$ и $\cos x=1-x^2/2+o(x^3)$. Тогда $\cos(\exp(x)-1)=\cos(x+x^2/2+o(x^2))=1-(x+x^2/2+o(x^2))^2/2+o((x+x^2/2+o(x^2))^3)=1-x^2/2-x^3/2+o(x^3)$, а $\exp(\cos(x)-1)=\exp(-x^2/2+o(x^3))=1-x^2/2+o(x^3)+o(-x^2/2+o(x^3))=1-x^2/2+o(x^3)$. Отсюда вытекает, что $\cos(\exp(x)-1)-\exp(\cos(x)-1)=-x^3/2+o(x^3)$, то есть $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\exp(x)-1)-\exp(\cos(x)-1)}{x^3}=-1/2$.