ЛЕКЦИЯ 15

Краткое содержание. Производная композиции. Примеры вычисления производных.

Теорема 1. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : A \to \mathbb{R}^k$ — вектор-функция, дифференцируемая в точке $b \in A$. Пусть $B \subset \mathbb{R}^k$ — множество, содержащее окрестность $U \subset B$ точки $\varphi(b)$. Пусть $f : B \to \mathbb{R}$ — функция k переменных, имеющая в любой точке $x \in U$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial y_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_k}(x)$, зависящие от x непрерывно в точке $\varphi(b)$. Тогда функция $g \stackrel{def}{=} f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет производную в точке b и эта производная равна $g'(b) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_i}(\varphi(v))\varphi_i'(b)$.*

Доказательство. Обозначим $v_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1(b), \dots, \varphi_i(b), \varphi_{i+1}(b+t), \dots, \varphi_n(b+t))$; здесь $0 \le i \le k$, в частности, $v_0(t) = \varphi(b+t)$ и $v_k(t) = \varphi(b)$ (не зависит от t). По теореме 1 лекции 14 функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ непрерывны в точке b — следовательно, все вектор-функции v_i непрерывны в точке 0. Поскольку $v_i(0) = \varphi(b) = a$ для всех i, получим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $v_i(t) \in U$ при любом i и $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Теперь имеем $g(b+t)-g(b) = f(v_0(t))-f(v_k(t)) = (f(v_0(t))-f(v_1(t)))+(f(v_1(t))-f(v_2(t)))+\dots+(f(v_{k-1}(t))-f(v_k(t)))$. По теореме Лагранжа (следствие 2 лекции 14) существуют функции $\theta_1, \dots, \theta_k : \mathbb{R} \to [0,1]$ такие, что $f(v_{i-1}(t)) - f(v_i(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_i(t) + \theta_i(t)(v_i(t) - v_{i-1}(t)))(\varphi_i(b+t) - \varphi_i(b))$. Поскольку функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ непрерывны, $\lim_{t\to 0} v_i(t) = \varphi(b)$ и $0 \le \theta_i(t) \le 1$ при всех i, получаем

$$g'(b) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(b+t) - g(b)) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\lim_{t\to 0} v_i(t) + \theta_i(t)(v_i(t) - v_{i-1}(t))\big) \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_i(b+t) - \varphi_i(b)}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(b))\varphi_1'(b) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(b))\varphi_k'(b),$$

что и требовалось. □

Примеры применения теоремы 1:

Пример 1. Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции, дифференцируемые в точке $b \in \mathbb{R}$. Тогда очевидно, что отображение $f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $(f \oplus g)(t) = (f(t), g(t))$, имеет производную в точке b, и она равна $(f'(b), g'(b))$.

Отображение, равное $S(x,y) = x + y$, имеет частные производные по обеим переменным, и обе они равны 1 во всех точках (почему?). Тогда $f + g = (f \oplus g) \circ S$, и из теоремы 1 вытекает, что $(f+g)'(b) = f'(b) + g'(b)$.

Аналогично, если $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задана формулой $M(x,y) = xy$, тогда $\frac{\partial M}{\partial x} = y$ и $\frac{\partial M}{\partial y} = x$. Тогда $fg = (f \oplus g) \circ M$, откуда по теореме 1 получаем $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$

Задача. Докажите следующее утверждение: пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f, g : A \to \mathbb{C}$ — дифференцируемые комплексно-значные функции. Тогда $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$ для всякого $b \in A$.

Пример 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция, заданная формулой $f(x) = \exp(\lambda x)$. Тогда $f'(b) = \lim_{t\to 0}(\exp(\lambda(b+t)) - \exp(\lambda b))/t = \lambda \exp(\lambda b) \lim_{t\to 0}(\exp(\lambda t) - 1)/(\lambda t)$ (случай $\lambda = 0$ разберите самостоятельно...). Пусть $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ — функция, заданная формулой $g(z) = (\exp(z) - 1)/z$. Как доказывалось ранее, $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$; доопределим функцию g, полагая $g(0) = 1$ — тогда g будет непрерывна в нуле. По теореме о непрерывности композиции функция $g \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, где $\varphi(t) = \lambda t$, непрерывна в нуле, откуда $\lim_{t\to 0}(\exp(\lambda t) - 1)/(\lambda t) = 1$ и $f'(b) = \lambda \exp(\lambda b)$.

Так, например, $\cos x = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, откуда $\cos' x = \frac{1}{2}(\exp'(ix) \cdot i + \exp'(-ix) \cdot (-i)) = -\frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) = -\sin x$ по формуле примера 1 лекции 14.

Пример 3. Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — строго монотонная (возрастающая или убывающая) непрерывная функция, Если $A = \inf\{f(t) \mid t \in (a,b)\}$ и $B = \sup\{f(t) \mid t \in (a,b)\}$, то по теореме о промежуточном значении $f((a,b)) = (A,B)$, и существует функция $g : (A,B) \to \mathbb{R}$, обратная к f. Тогда $f \circ g = \mathrm{id}$, откуда вытекает, что $(f \circ g)'(p) = 1$ для всех $p \in (A,B)$. По теореме 1 получаем $f'(g(p))g'(p) = 1$, то есть $g'(p) = 1/f'(g(p))$. Например, $(\ln x)'(p) = 1/\exp(\ln p) = 1/p$.

Пример 4. $x^a = \exp(a \ln x)$, откуда $(x^a)' = \exp'(a \ln x) \cdot (a \ln x)' = ax^a/x = ax^{a-1}$. Здесь $a \in \mathbb{R}$ произвольно, а производная, как и функция, определена при всех $x > 0$. Также $a^x = \exp(x \ln a)$, откуда $(a^x)' = \exp'(x \ln a) \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a$. Здесь a — произвольное положительное число, а функция и производная (отличающаяся от нее множителем) определены при всех $x \in \mathbb{R}$.