ЛЕКЦИЯ 14

Краткое содержание. Производные. Теоремы о промежуточной точке (Ферма, Ролля и Лагранжа).

Определение 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ — отображение (вектор-функция одной переменной), $a \in \mathbb{R}$. Вектор $f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$ называется производной вектор-функции f в точке a.

Пусть теперь $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (вектор-функция k действительных переменных). Зафиксируем точку $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Для произвольного $i = 1, \dots, k$ можно рассмотреть вектор-функцию одной переменной $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, заданную формулой $f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_k)$. Производная $f_i'(a_i) \in \mathbb{R}^n$ называется частной производной f по i-му аргументу в точке a и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Заметим, что буква "$x$" в последнем обозначении — условность, означает "i-й аргумент", можно заменить любой другой буквой — важен только индекс i.

Пример 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — экспонента: $f(x) = \exp(x)$. Тогда $f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(a+t) - \exp(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(a)(\exp(t)-1)}{t} = \exp(a) \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t)-1}{t} = \exp(a)$. Иными словами, производная функции exp в точке a равна ее значению в той же точке.

Теорема 1. *Если вектор-функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ имеет производную в точке a, то f непрерывна в этой точке.*

Доказательство. $\lim_{t \to 0}(f(a+t) - f(a)) = \lim_{t \to 0} t \cdot \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = 0 \cdot f'(a) = 0$, что и означает непрерывность. □

Пример 2. Не всякая функция, непрерывная в точке a, имеет в этой точке производную. Например, $f(t) = |t|$, очевидно, непрерывна в $a = 0$ (как и во всех остальных точках). Однако $\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{|t|}{t} = 1$ при $t > 0$ и -1 при $t < 0$, так что $f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t}$ не существует.

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ и $f : A \to \mathbb{R}$. Точка $c \in A$ называется точкой локального минимума функции f, если существует окрестность U точки c такая, что $f(c) \le f(x)$ для любой точки $x \in U$.

Теорема 2 (теорема Ферма)**.** *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ — функция, и $c \in A$ — точка локального минимума и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$. Если $f'(c)$ существует, то $f'(c) = 0$*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать (почему?), что c — точка минимума функции на интервале $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Пусть $g(t) = \frac{f(c+t) - f(c)}{t}$ при $t \ne 0$. Предел $f'(c) = \lim_{t \to 0} g(t)$ равен (почему?) пределам $\lim_{t \to +0} g(t)$ и $\lim_{t \to -0} g(t)$. В силу выбора точки c имеем $g(t) \ge 0$ при $t > 0$ и $g(t) \le 0$ при $t < 0$. Отсюда $\lim_{t \to +0} g(t) \ge 0$ и $\lim_{t \to -0} g(t) \le 0$, то есть $f'(c) = \lim_{t \to 0} g(t) = 0$. □

Такое же утверждение верно, если c — точка локального максимума.

Следствие 1 (теорема Ролля)**.** *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция, дифференцируемая (имеющая производную) во всех точках и такая, что $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Отрезок $[a, b]$ — компакт, а функция f непрерывна по теореме 1. Тем самым имеются точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, в которых функция f достигает наибольшего и наименьшего значения. Если f — константа, то $f'(c) = 0$ для всех $c \in (a, b)$. В противном случае, ввиду того что $f(a) = f(b)$, хотя бы одна из точек c_1, c_2 лежит на интервале (a, b). Она является точкой локального максимума или минимума, поэтому к ней применима теорема 2. □

Следствие 2 (следствия 1 — теорема Лагранжа)**.** *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(t) + \frac{t-b}{b-a} f(a) + \frac{a-t}{b-a} f(b)$. Тогда φ дифференцируема во всех точках интервала (a, b) (поскольку f дифференцируема). С другой стороны, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, так что к φ применимо следствие 1: существует $c \in (a, b)$ такое, что $0 = \varphi'(c) = f'(c) + \frac{f(a) - f(b)}{b-a}$. □

Часто вместо $c \in [a, b]$ пишут $c = a + \theta(b - a)$, где $0 \le \theta \le 1$.

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Дифференцируемая функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(c) \ge 0$ при всех $c \in [a, b]$.*

Доказательство. Пусть f возрастает: $f(x) \geq f(y)$ при всех $x \geq y$. Тогда для всех $c \in [a,b]$ и всех t таких, что $t \neq 0$ и $c+t \in [a,b]$ имеем $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} \geq 0$. Тогда $f'(c) = \lim_{t\to 0} g(t) \geq 0$.

Обратно, пусть $f'(c) \geq 0$ при всех $c \in [a,b]$, и пусть $x \geq y$. Тогда, согласно следствию 2, существует $c \in [y,x]$ такое, что $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \geq 0$. □

Следствие 4. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, $f'(a) = A$ и $f'(b) = B$. Тогда для каждого $C \in [A,B]$ существует $c \in [a,b]$ такое, что $f'(c) = C$.*

Доказательство. Если $C = A$ или $C = B$, то утверждение очевидно; пусть $A < C < B$ (мы предпологаем, что $A < B$; если наоборот, то рассуждения аналогичные).

Рассмотрим вспомогательную функцию $h(t) = f(t) - Ct$. Тогда $h'(a) = A - C < 0$ и $h'(b) = B - C > 0$. Докажем, что a — точка локального максимума функции h. Действительно, если это не так, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует t, $0 < t < \varepsilon$, такое что $f(a+t) > f(a)$. Для таких точек t имеем $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} \geq 0$, откуда вытекает $f'(a) = \lim_{t\to 0} g(t) \geq 0$ — противоречие. Аналогично доказывается, что b — точка локального максимума.

Функция h дифференцируема и, следовательно, непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$. Отрезок — компакт, поэтому существует точка $c \in [a,b]$, в которой функция h достигает своего наименьшего значения. Поскольку a, b — точки локального максимума, $c \neq a, b$. Отсюда по теореме Ферма получим $h'(c) = 0$, то есть $f'(c) = C$. □

Иными словами, функция f' — производная функции f — удовлетворяет теореме о промежуточном значении. Как известно, этой теореме удовлетворяют все непрерывные функции; производная, однако, не обязана быть непрерывной:

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(t) = \begin{cases} t^2 \sin(1/t), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$. При $t \neq 0$ имеем $f'(t) = 2t\sin(1/t) - \cos(1/t)$, а при $t = 0$ имеем $f'(0) = \lim_{t\to 0} t\sin(1/t) = 0$ (поскольку $-|t| \leq t\sin(1/t) \leq |t|$, а $\lim_{t\to 0} |t| = 0$ — применяем лемму о двух полицейских). Таким образом, $f'(t)$ существует при всех t.

Имеем $\lim_{t\to 0} 2t\sin(1/t) = 0$, как уже доказывали. В то же время $\lim_{t\to 0} \cos(1/t)$ не существует, т.к. $\lim_{n\to\infty} 1/(n\pi) = 0$, но $\lim_{n\to\infty} \cos(1/(1/n\pi)) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует. Следовательно, $\lim_{t\to 0} f'(t)$ также не существует, то есть функция f' в точке 0 разрывна.