ЛЕКЦИЯ 13

Краткое содержание. Общие свойства компактов. Описание компактов в $\mathbb{R}^n$.

Свойства компектных подмножеств произвольного хаусдорфова топологического пространства:

Теорема 1. *1) Всякое компактное множество в хаусдорфовом топологическом пространстве замкнуто.*
2) Если $A \subset X$ компактно, а $B \subset A$ замкнуто, то B компактно.
3) Если $A \subset X$ компактно, а $f : A \to Y$ — отображение, непрерывное во всех точках, то $f(A) \subset Y$ компактно (и, в частности, замкнуто).

Доказательство. Свойство 1. Пусть X — хаусдорфово пространство, $A \subset X$ компактно. Для любых точек $a \in A$ и $b \in X \setminus A$ существуют непересекающиеся окрестности $U_{ab}(a) \subset X$ и $V_{ab}(b) \subset X$ (обе окрестности, в прниципе, зависят и от a, и от b). Зафиксируем $b \in X \setminus A$. Поскольку $a \in U_{ab}(a)$, имеем $A \subset \bigcup_{a \in A} U_{ab}(a)$. Поскольку все $U_{ab}(a)$ открыты, а A компактно, найдется *конечный* набор точек $a_1, \dots, a_N \in A$ таких, что $A \subset U_{a_1 b}(a_1) \cup \dots \cup U_{a_N b}(a_N)$. Тогда пересечение $W(b) \stackrel{\text{def}}{=} V_{a_1 b}(b) \cap \dots \cap V_{a_N b}(b)$ открыто (пересечение конечного числа открытых множеств), содержит b (поскольку все $V_{a_i b}(b)$ содержат) и не пересекается с $U_{a_1 b}(a_1) \cup \dots \cup U_{a_N b}(a_N)$ (поскольку $V_{a_i b}(b)$ не пересекается с $U_{a_i b}(a)$). Следовательно, $W(b)$ не пересекается с A, то есть целиком лежит в $X \setminus A$. Поскольку $b \in X \setminus A$ — произвольная точка, получим $X \setminus A = \bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} W(b)$ — открытое множество. По определению, это означает, что A замкнуто.

Свойство 2. Пусть A компактно, а $B \subset A$ замкнуто. Пусть $B \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все $U_\alpha \subset X$ открыты. Тогда $A \subset (X \setminus B) \cup \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все множества открыты. Поскольку A компактно, существует конечный набор $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ такой, что $A \subset (X \setminus B) \cup (U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N})$, откуда $B \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N})$. Следовательно, B компактно.

Свойство 3. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, $A \subset X$ — компакт, и $f(A) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все $U_\alpha \subset Y$ открыты. Тогда $A \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$. Поскольку f непрерывно, все $f^{-1}(U_\alpha) \subset X$ открыты. Поскольку A компактно, существует конечный набор $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ такой, что $A \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_N})$. Но тогда $f(A) \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$, и компактность $f(A)$ доказана. □

Свойства компактных множеств в $\mathbb{R}^n$:

Теорема 2. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда согласно теореме 1 оно замкнуто. Пусть $B_r(0) \subset \mathbb{R}^b$ — шар радиуса $r > 0$ (без границы) с центром в начале координат. Тогда $\bigcup_{r>0} B_r(0) = \mathbb{R}^n$ и, следовательно, $A \subset \bigcup_{r>0} B_r(0)$. Согласно примеру 1 лекции 11, шар $B_r(0)$ открыт. Из компактности A вытекает, что существует конечный набор чисел $r_1 < r_2 < \dots < r_N$ такой, что $A \subset B_{r_1}(0) \cup \dots \cup B_{r_N}(0) = B_{r_N}(0)$. Но это и означает, что множество A ограничено.

Обратно, пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и ограничено. Тогда существует параллелепипед $\Pi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ такой, что $A \subset \Pi$ (докажите!). Поскольку Π — компакт (теорема 2 лекции 12), а A замкнуто, A — компакт по теореме 1. □

Следствие 1. *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — компакт, $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная Функция. Тогда функция f на A ограничена и достигает своего максимума и минимума. Иными словами, существует точка $x^* \in A$ такая, что $f(x^*) \geq f(x)$ для всякой точки $x \in A$ (и аналогично для минимума).*

Доказательство. Образ $f(A) \subset \mathbb{R}$ — компакт по свойству 3 из теоремы 1. Следовательно, по теореме 2 он ограничен, и точная верхняя грань $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup f(A)$ — действительное число (а не $+\infty$). Если $M \notin f(A)$, то M является предельной точкой $f(A)$ (пример 2 из лекции 11). Поскольку $f(A)$ замкнуто по теореме 1 (или 2), оно содержит все свои предельные точки, включая M. Тем самым существует $x^* \in A$ такая, что $f(x^*) = M = \max f(A) \geq f(x)$ для всякого $x \in A$. □

Пример 1. Множество $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Действительно, если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$, то $0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1$, откуда вытекает, что Δ_n ограничено. С другой стороны, $\Delta_n = A_1 \cap \dots \cap A_n \cap B$, где $A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0\} = p_i^{-1}([0, +\infty))$ при $i = 1, \dots, n$ и $B = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 1\} = q^{-1}(\{1\})$, где $p_i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$ и $q(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. Все функции p_i и q

непрерывны, множества $[0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ и $\{1\} \subset \mathbb{R}$ замкнуы, так что все $A_i \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ замкнуты по теореме 2 лекции 11. Отсюда вытекает, что их пересечение Δ_n замкнуто и, следовательно, компактно.

Функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная равенством $h(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$, непрерывна. Согласно следствию 1, существует точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \Delta_n$ такая, что $h(x^*) \geq h(x)$ для всякой точки $x \in \Delta^n$. Предположим, что $x_i^* > x_j^*$ для некоторых $1 \leq i, j \leq n$, и рассмотрим $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которой $x_i = x_j = (x_i^* + x_j^*)/2$ и $x_k = x_k^*$ для всех $k \neq i, j$. Как нетрудно убедиться, $x \in \Delta_n$. С другой стороны, имеет место неравенство $0 < \left(\frac{x_i^* - x_j^*}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_i^* + x_j^*}{2}\right)^2 - x_j^* x_j^*$, откуда вытекает (почему?), что $h(x^*) < h(x)$. Это противоречит выбору x^* как точки, в которой h достигает максимума. Тем самым i и j не существуют, то есть $x_1^* = \dots = x_n^* = 1/n$.

Пусть теперь $y_1, \dots, y_n \geq 0$ и хотя бы одна из них отлична от нуля. Положим $x_i = y_i/(y_1 + \dots + y_n)$ для всех $i = 1, \dots, n$; тогда $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$. Согласно доказанному выше, $h(x) \leq h(1/n, \dots, 1/n) = 1/n^n$, то есть $\frac{y_1 \dots y_n}{(y_1 + \dots + y_n)^n} \leq \frac{1}{n^n}$. Перенося сумму в числитель и извлекая корень n-ой степени, получим $\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$ — классическое неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.